TẠP CHÍ KHOA HỌC ĐẠI HỌC TÂN TRÀO
ISSN: 2354 - 1431
http://tckh.daihoctantrao.edu.vn/

TRAINING OF THINKING ACTIVITIES FOR STUDENTS THROUGH TEACHING ABOUT FINDING THE INTEGER SOLUTIONS OF EQUATIONS AT HIGH SCHOOLS

Nguyen Thi Kieu Nga
Hanoi Pedagogical University 2, Vietnam
Email address: nguyenthikieunga@hpu2.edu.vn
DOI: https://doi.org/10.51453/2354-1431/2022/742

Article info

Received: 5/3/2022
Revised: 15/4/2022
Accepted: 1/6/2022

Keywords:
Specialization, familiarization, generalization, integer solutions of equations.

Abstract:

In teaching math, students' thinking operations training plays a significant role in developing students' thinking capacity. This article presents the training process of specialization, analogization, and generalization for high school students in teaching equations with integer solutions.

TẠP CHÍ KHOA HỌC ĐẠI HỌC TÂN TRÀO
ISSN: 2354 - 1431
http://tckh.daihoctantrao.edu.vn/

RÈN LUYỆN THAO TÁC TƯ DUY CHO HỌC SINH TRONG DẠY HỌC PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG

Nguyễn Thị Kiều Nga
Trường ĐHSP Hà Nội 2, Việt Nam
Email address: nguyenthikieunga@hpu2.edu.vn
DOI: https://doi.org/10.51453/2354-1431/2022/742

Thông tin bài viết

Ngày nhận bài: 5/3/2022
Ngày sửa bài: 15/4/2022
Ngày duyệt đăng: 1/6/2022

Từ khóa:

Đặc biệt hoá, tương tự hoá, khái quát hoá, phương trình nghiệm nguyên.

Tóm tắt

Trong dạy toán, việc rèn luyện các thao tác tư duy cho học sinh có vai trò rất quan trọng trong việc phát triển năng lực tư duy cho người học. Bài báo này trình bày về vấn đề rèn luyện các thao tác tư duy đặc biệt hoá, tương tự hoá, khái quát hoá cho học sinh trong dạy học phương trình nghiệm nguyên ở trường phổ thông.

1. MỞ ĐẦU:

Môn Toán là một trong những môn học có vai trò quan trọng trong việc phát triển tư duy cho học sinh. Vì thế, người giáo viên trong khi dạy học toán, ngoài việc cung cấp các kiến thức toán học cơ bản thì việc rèn luyện các thao tác tư duy cho học sinh là rất cần thiết. Theo G.Polya [4] và các tác giả trong [2], [6], [7] thì các thao tác tư duy bao gồm: phân tích, tổng hợp, so sánh, khái quát hoá, trừu tượng hoá, tương tự hoá, đặc biệt hoá. Các thao tác tư duy này còn được Nguyễn Bá Kim [2] và một số tác giả khác gọi là những hoạt động trí tuệ cơ bản. Trong quá trình dạy học toán, chúng tôi nhận thấy việc sử dụng thành thạo các thao tác tư duy khái quát hóa, đặc biệt hóa, tương tự hóa có thể vận dụng để dự đoán được kết quả bài toán, tìm phương hướng giải bài toán hoặc để mở rộng, đào sâu và hệ thống hóa kiến thức. Từ những bài toán đã cho học sinh có thể vận dụng khái quát hóa, đặc biệt hóa, tương tự hoá để đề xuất và giải những bài toán mới, hình thành những tri thức mới. Các thao tác tư duy này kích thích người học tìm tòi, khám phá, phát triển khả năng phán đoán, tưởng tượng…Trên cơ sở đó học sinh sẽ hiểu vấn đề sâu sắc hơn, toàn diện hơn, mở rộng được vốn kiến thức của mình và là tiền đề để hình thành tư duy sáng tạo cho người học.

Phương trình ngiệm nguyên là một trong các dạng toán khó ở phổ thông và thường xuất hiện trong các kì thi học sinh giỏi các cấp. Các bài toán về phương trình nghiệm nguyên rất đa dạng và chỉ một số ít bài toán có phương pháp giải tổng quát, còn lại mỗi bài toán lại có cách giải khác nhau. Do đó khi giải toán về phương trình nghiệm nguyên, đòi hỏi người học phải có kiến thức, kỹ năng tốt và khả năng vận dụng kiến thức linh hoạt. Vì thế trong khi dạy học về phương trình nghiệm nguyên, giáo viên có thể rèn luyện các thao tác tư duy cho học sinh để phát triển năng lực tư duy cho người học. Trong bài báo này, chúng tôi đề cập đến vấn đề rèn luyện các thao tác tư duy: đặc biệt hoá, tương tự hoá, khái quát hoá trong dạy học phương trình nghiệm nguyên ở trường phổ thông. Nội dung chính của bài báo được trình bày ở Mục 2. Mục 2.1 chúng tôi trình bày về rèn luyện thao tác tư duy đặc biệt hoá. Mục 2.2 trình bày về rèn luyện thao tác tư duy tương tự hoá và Mục 2.3 trình bày về rèn luyện thao tác tư duy khái quát hoá.

2. NỘI DUNG

2.1. Rèn luyện thao tác tư duy đặc biệt hoá

Theo G. Polya [4]: *"Đặc biệt hoá là việc chuyển từ việc nghiên cứu một tập hợp đối tượng đã cho sang việc nghiên cứu một tập hợp nhỏ hơn chứa trong tập hợp đã cho"*. Điều đó cũng có nghĩa là nếu một mệnh đề đúng trong trường hợp tổng quát thì sẽ đúng trong các trường hợp cụ thể, nếu mệnh đề sai trong trường hợp cụ thể nào đó thì mệnh đề tổng quát sai. Đặc biệt hoá là chuyển từ cái chung, cái tổng quát về cái riêng. Chẳng hạn trong các bài toán có chứa các tham số, biến số, ta sẽ đặc biệt hoá nó bởi các giá trị cụ thể phù hợp. Hay chúng ta có thể chuyển việc nghiên cứu đa giác sang nghiên cứu những đa giác đều… Khi giải phương trình nghiệm nguyên, không phải bài toán nào cũng giải được một cách dễ dàng. Khi đó chúng ta có thể giải bài toán trong các trường hợp đặc biệt. Việc xét các trường hợp đặc biệt có thể tìm được những gợi ý tốt để tìm được phương án giải của bài toán tổng quát, hoặc xây dựng được nhiều bài toán đặc biệt hơn. Nhiều khi việc giải bài toán trong trường hợp đặc biệt chưa giúp ta giải được bài toán đã cho, nhưng việc giải được một phần của bài toán cũng rất có giá trị.

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $\frac{1}{x^k}+\frac{1}{y^k}+\frac{1}{z^k}+\frac{1}{t^k}=1$ (1) với *k* là số nguyên.

Giải: Ta xét bài toán trong trường hợp đặc biệt $k=2.$ Khi đó bài toán trở thành:

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{t^2}=1$ (2).

Vì x,y,z,t nguyên dương nên không giảm tính tổng quát, có thể giả thiết $1\le x\le y\le z\le t.$ Đặt $A=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{t^2}.$

Nếu $x=1$ thì $A=1+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{t^2}>1.$ Suy ra phương trình vô nghiệm. Do đó $x\ge 2.$ Suy ra $2\le x\le y\le z\le t.$ Nếu $t\ge 3$ thì $A\le\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{9}.$

Mặt khác ta có $\frac{1}{x^2}\le\frac{1}{4},\frac{1}{y^2}\le\frac{1}{4},\frac{1}{z^2}\le\frac{1}{4}.$ Suy ra $A\le\frac{3}{4}+\frac{1}{9}=\frac{31}{36}<1.$ Do đó phương trình vô nghiệm. Vì thế $t\le 2.$ Suy ra $2\le x\le y\le z\le t\le 2.$ Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $(x,y,z,t)=(2,2,2,2).$

Từ cách giải của bài toán đối với trường hợp đặc biệt $k=2,$ ta có cách giải đối bài toán ban đầu như sau:

* Nếu $k=0$ thì vế trái bằng 4. Do đó phương trình vô nghiệm.

* Nếu $k<0$ thì vế trái là $\frac{1}{x^k}+\frac{1}{y^k}+\frac{1}{z^k}+\frac{1}{t^k}>1.$ Suy ra phương trình vô nghiệm.

* Xét trường hợp $k>0.$

Vì x,y,z,t nguyên dương nên không giảm tính tổng quát ta có thể giả thiết $1\le x\le y\le z\le t.$ Đặt $A=\frac{1}{x^k}+\frac{1}{y^k}+\frac{1}{z^k}+\frac{1}{t^k}.$

Nếu $x=1$ thì $A=1+\frac{1}{y^k}+\frac{1}{z^k}+\frac{1}{t^k}>1.$ Suy ra phương trình vô nghiệm. Do đó $x\ge 2.$ Suy ra $2\le x\le y\le z\le t.$ Từ đó $1<x^k\le y^k\le z^k\le t^k.$ Suy ra $A=\frac{1}{x^k}+\frac{1}{y^k}+\frac{1}{z^k}+\frac{1}{t^k}\le\frac{4}{x^k}.$ Hay $1\le\frac{4}{x^k}.$ Điều này tương đương với $x^k\le 4.$ Do đó $k\le 2.$ Vì $k>0$ nên $k=1$ hoặc $k=2.$

* Nếu $k=2$ thì phương trình trở thành $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{t^2}=1.$ Suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $(x,y,z,t)=(2,2,2,2).$

* Nếu $k=1$ thì phương trình trở thành $A=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=1.$ Lập luận tương tự như trên ta có $x>1.$ Nếu $x\ge 5$ thì $A=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\le\frac{4}{x}\le\frac{4}{5}<1.$ Do đó phương trình vô nghiệm. Suy ra $1<x<5.$ Hay $x=2,3,4.$

\+ Nếu $x=2$ thì $A=\frac{1}{2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=1.$ Suy ra $B=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{2}.$ Nếu $y=2$ thì $B=\frac{1}{2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}>\frac{1}{2}.$ Suy ra phương trình vô nghiệm. Do đó $y>2.$ Mặt khác $B=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}<\frac{3}{y}.$ Vì thế $\frac{1}{2}\le\frac{3}{y}.$ Suy ra $y\le 6.$ Do đó $2<y\le 6.$ Hay $y=3,4,5,6.$

Xét các trường hợp của y và lập luận tương tự như trên ta được nghiệm của phương trình là các hoán vị của (2,3,7,42), (2,3,8,24), (2,3,9,18), (2,3,10,15), (2,3,12,12), (2,4,5,20),

(2,4,6,12), (2,4,8,8), (2,5,5,10), (2,6,6,6).

* Nếu $x=3$ thì $A=\frac{1}{3}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=1$. Suy ra $B=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{2}{3}$. Do $x\le y\le z\le t$ nên $3\le y\le z\le t$. Mặt khác $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{2}{3}\le\frac{3}{y}$. Suy ra $y\le\frac{9}{2}$. Hay $y=3,4$. Xét các trường hợp của y và lập luận tương tự như trên ta có nghiệm của phương trình là các hoán vị của $(3,3,4,12),(3,3,6,6),(3,4,4,6)$.

* Nếu $x=4$ thì phương trình có nghiệm (4,4,4,4).

Kết luận:

- Nếu $k\le 0$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $k=1$ thì phương trình có nghiệm (4,4,4,4) và các hoán vị của

(2,3,7,42), (2,3,8,24), (2,3,9,18), (2,3,10,15), (2,3,12,12), (2,4,5,20), (2,4,6,12),

(2,4,8,8), (2,5,5,10), (2,6,6,6),

(3,3,4,12), (3,3,6,6), (3,4,4,6).

- Nếu $k=2$ thì phương trình có nghiệm (2,2,2,2)
- Nếu $k>2$ thì phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 2: Cho k là số tự nhiên khác 0. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$(x+k)(x+k+1)(x+k+2)(x+k+3)=y^{2k}\ (*).$$

Giải: Ta xét bài toán với $k=1$. Khi đó bài toán trở thành: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=y^2$ (**).

Phương trình (**) tương đương với $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=y^2$. Đặt $a=x^2+5x+5$. Khi đó phương trình trở thành $(a-1)(a+1)=y^2$. Suy ra $a^2-1=y^2$.

Do đó $(a+y)(a-y)=1$. Vì $a+y$ và $a-y$ là các số nguyên nên điều này xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a+y=1\\a-y=1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a+y=-1\\a-y=-1\end{cases}$. Do đó $a+y=a-y$. Suy ra $y=0$. Thay vào phương trình (**) ta có $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=0$.

Do đó $x=-1,\ x=-2,\ x=-3,\ x=-4$.

Vậy nghiệm của phương trình là $(-1,0),(-2,0),(-3,0),(-4,0)$.

Từ cách giải của bài toán trong trường hợp đặc biệt $k=1$ và để ý các nhân tử ở vế trái của phương trình có $k+(k+3)=(k+1)+(k+2)$, ta có cách giải bài toán (*) như sau:

Phương trình $(*)$ tương đương với

$$\left(x^2+(2k+3)x+k^2+3k\right)\left(x^2+(2k+3)x+k^2+3k+2\right)=\left(y^k\right)^2.$$

Đặt $a=\left(x^2+(2k+3)x+k^2+3k+1\right)$, $t=y^k$. Khi đó phương trình trở thành $(a-1)(a+1)=t^2$. Lập luận tương tự như trên ta có nghiệm của phương trình là $(-k,0),(-k-1,0),(-k-2,0),(-k-3,0)$.

2.2. Rèn luyện thao tác tư duy tương tự hoá

Theo G. Polya [4]: *"Tương tự là một kiểu giống nhau nào đó. Những đối tượng giống nhau phù hợp với nhau trong một mối quan hệ nào đó"*.

Tác giả Chu Cẩm Thơ trong [5] thì cho rằng: *"Tương tự là thao tác tư duy dựa trên sự giống nhau về tính chất và quan hệ của những đối tượng toán học khác nhau"*.

Chúng ta thường xét sự tương tự toán học trên các khía cạnh sau:

- Hai bài toán là tương tự nếu đường lối, phương pháp giải quyết là giống nhau.
- Hai hình là tương tự nếu có nhiều tính chất giống nhau hay nếu vai trò của chúng giống nhau trong vấn đề nào đó, hay nếu giữa các phần tử tương ứng của chúng có quan hệ giống nhau.
- Nhiều khi trong quá trình mở rộng, những tập hợp đối tượng có những thuộc tính tương tự, từ đó ta suy đoán những tính chất từ tập hợp này sang tập hợp khác.

Khi dạy học toán, tương tự là thao tác phổ biến mà giáo viên thường dùng để hướng dẫn học sinh giải các dạng toán có sự tương đồng về cách giải. Từ đó học sinh phát hiện được sự tương tự của các bài toán, trên cơ sở đó học sinh rút ra được cách giải chung cho cùng một dạng toán. Vì thế, khi giải phương trình nghiệm nguyên, giáo viên cần hướng dẫn học sinh xét các yếu tố tương tự của bài toán cần giải với bài toán đã cho. Nhờ đó, học sinh có thể "quy lạ thành quen", biến đổi bài toán phức tạp thành bài toán đơn giản đã biết, từ đó góp phần phát triển tư duy cho học sinh trong quá trình học tập.

Ví dụ 3: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2+y^2=3z^2$ (*).

Giải: Vế phải của phương trình là $3z^2\equiv 0\pmod 3$. Với mọi số nguyên *x*, ta có

$x^2 \equiv 0 \pmod 3$ hoặc $x^2 \equiv 1 \pmod 3$. Suy ra, với mọi số nguyên *x*, *y* thì $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod 3$, $x^2 + y^2 \equiv 1 \pmod 3$, hoặc $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 3$. Do đó để phương trình có nghiệm thì vế trái của phương trình là $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod 3$. Điều này chỉ xảy ra khi và chỉ khi $x^2 \equiv 0 \pmod 3$ và $y^2 \equiv 0 \pmod 3$. Suy ra $x = 3x_1, y = 3y_1$. Do đó phương trình trở thành $3x_1^2 + 3y_1^2 = z^2$. Suy ra $z^2 \equiv 0 \pmod 3$. Vì thế $z = 3z_1$. Do đó ta có phương trình $x_1^2 + y_1^2 = 3z_1^2$. Lập luận tương tự như trên ta có $x_1 = 3x_2, y_1 = 3y_2, z_1 = 3z_2$ với $x_2 = \frac{x}{3^2}, y_2 = \frac{y}{3^2}, z_2 = \frac{z}{3^2}$ và với mọi x_2, y_2, z_2 là số nguyên. Tương tự ta có phương trình

$x_n^2 + y_n^2 = 3z_n^2$ trong đó $x_n = \frac{x}{3^n}, y_n = \frac{y}{3^n}, z_n = \frac{z}{3^n}$

với x_n, y_n, z_n là số nguyên, với mọi *n* là số tự nhiên. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $(x, y, z) = (0,0,0)$. Ngược lại ta thấy $(0,0,0)$ là nghiệm của phương trình. Do đó phương trình có nghiệm duy nhất $(0,0,0)$.

Từ Ví dụ 3, giáo viên yêu cầu học sinh giải bài toán sau:

Ví dụ 4: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + y^2 = 4z^2$ (**).

Học sinh dễ dàng nhận thấy, vế trái của phương trình (*) và (**) giống nhau, vế phải của phương trình (*) là $4z^2 \equiv 0 \pmod 4$. Do đó học sinh có thể giải tương tự Ví dụ 3 như sau:

Với mọi số nguyên *x*, ta có $x^2 \equiv 0 \pmod 4$ hoặc $x^2 \equiv 1 \pmod 4$. Do đó lập luận tương tự như Ví dụ 2 ta có $(0,0,0)$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Giáo viên có thể yêu cầu học sinh giải bài toán tương tự nhưng ở mức khó hơn.

Ví dụ 5: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + y^2 = (2^{n+1} + 3)z^2, n \in \mathbb{N}^*$.

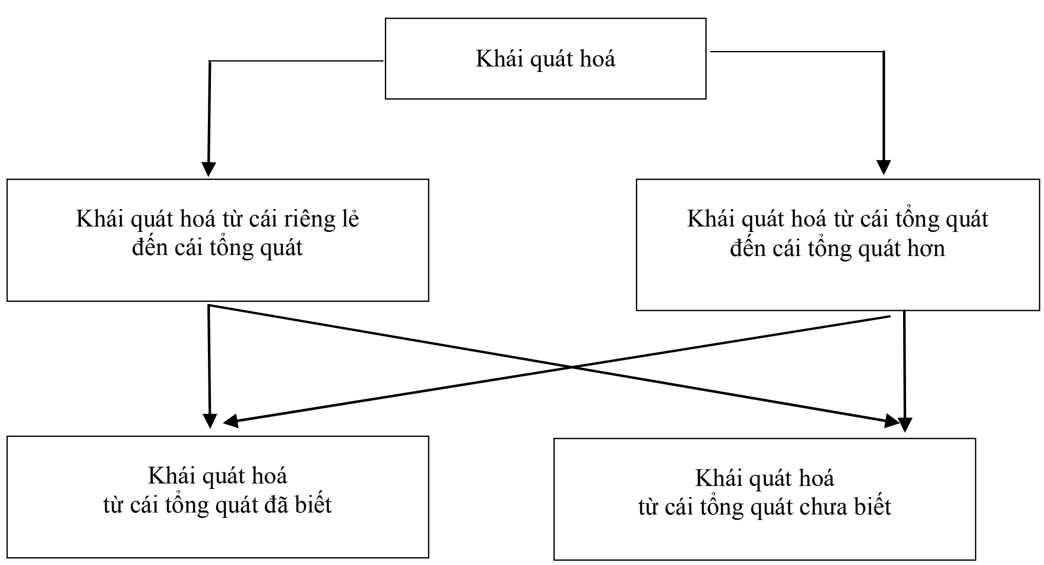
Vì *n* là số tự nhiên khác 0, nên $2^{n+1} + 3 \equiv 3 \pmod 4$. Do đó $(2^{n+1} + 3)z^2 \equiv 3z^2 \pmod 4$. Suy ra $3z^2 \equiv 0 \pmod 4$ hoặc $3z^2 \equiv 3 \pmod 4$. Mặt khác $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod 4$, $x^2 + y^2 \equiv 1 \pmod 4$, hoặc $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 4$. Do đó để phương trình có nghiệm thì vế trái của phương trình là $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod 4$. Lập luận tương tự như hai ví dụ trên ta có $(0,0,0)$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

2.3. Rèn luyện thao tác tư duy khái quát hoá

Theo Hoàng Chúng [1]: *"Khái quát hoá là dùng trí óc tách ra cái chung trong các đối tượng hoặc hiện tượng, sự kiện. Muốn khái quát hoá, thường phải so sánh nhiều đối tượng, hiện tượng, sự kiện với nhau"*.

Tác giả Đào Văn Trung [6] thì cho rằng *"Từ những sự vật khác nhau, tìm ra những tính chất chung của chúng và quy kết lại, phương pháp tư duy này gọi là khái quát hoá"*.

Chúng tôi đồng ý với quan điểm của Nguyễn Bá Kim trong [3] rằng: có hai dạng khái quát hoá và có thể mô tả chúng theo sơ đồ sau:



Như vậy, khái quát hoá được xem là một thao tác tư duy phức tạp, là quá trình bao quát nhiều đối tượng khác nhau thành một loại, một nhóm dựa trên cơ sở một số dấu hiệu hoặc thuộc tính giống nhau sau khi đã gạt bỏ các dấu hiệu khác nhau riêng lẻ. Khái quát hoá và đặc biệt hoá là hai thao tác tư duy trái ngược nhau. Nhờ đặc biệt hoá học sinh có thể giải được bài toán dễ dàng hơn. Nhờ khái quát mà học sinh nhìn nhận vấn đề một cách có hệ thống hơn, toàn diện hơn. Thao tác tư duy khái quát hoá cũng là một trong các tiền đề để học sinh phát triển năng lực tư duy sáng tạo. Do vậy, trong dạy học toán, giáo viên nên thường xuyên luyện tập cho học sinh khả năng khái quát hoá bài toán từ bài toán đã cho.

Ví dụ 6: Giải phương trình nghiệm nguyên $x^3+y^3+z^3=x+y+z+2023.$

Giải:

Phương trình tương đương với

$x^3+y^3+z^3-x-y-z=2023.$

Hay $\left(x^3-x\right)+\left(y^3-y\right)+\left(z^3-z\right)=2023.$

Vì $x^3-x=x\left(x-1\right)\left(x+1\right)$ là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 3. Tương tự $y^3-y,\ z^3-z$ chia hết cho 3. Suy ra $\left(x^3-x\right)+\left(y^3-y\right)+\left(z^3-z\right)$ chia hết cho 3. Nhưng 2023 không chia hết cho 3. Vì thế phương trình vô nghiệm.

Ta có thể khái quát hoá bài toán theo nhiều cách.

Cách 1: Theo Định lý Fermat nhỏ "Nếu p là số nguyên tố và a là số nguyên không chia hết cho p thì $a^{p-1}-1$ chia hết cho p". Định lý này có thể phát biểu dưới dạng tương đương là "Nếu p là số nguyên tố và a là số nguyên bất kì thì a^p-a chia hết cho p". Do đó ta có ngay bài toán sau:

Ví dụ 7: Cho p là số nguyên tố. Giải phương trình nghiệm nguyên

$x^p+y^p+z^p=x+y+z+(p^2+1).$

Giải: Phương trình tương đương với

$x^p+y^p+z^p-x-y-z=\left(x^p-x\right)+\left(y^p-y\right)+\left(z^p-z\right)=p^2+1.$

Mặt khác $x^p-x\ \vdots\ p,\ y^p-y\ \vdots\ p,\ z^p-z\ \vdots\ p.$ với mọi $x.$ Suy ra $x^p+y^p+z^p-x-y-z\ \vdots\ p.$ Nhưng p^2+1 không chia hết cho $p.$ Do đó phương trình vô nghiệm.

Cách 2: Thay 3 ẩn x,y,z trong phương trình bằng n ẩn hoặc thay p^2+1 bằng một biểu thức không chia hết cho $p.$

Ví dụ 8. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$1!+2!+\cdots+x!=y^2.$$

Giải: - Nếu $x=1$ thì phương trình trở thành $1!=y^2.$ Suy ra $y=\pm1.$ Do đó phương trình có nghiệm $\left(1,-1\right),\left(1,1\right).$

- Nếu $x=2$ thì phương trình trở thành $1!+2!=y^2.$ Suy ra $y^2=3.$ Hay $y=\pm\sqrt{3}.$ Do đó phương trình vô nghiệm.

- Nếu $x=3$ thì phương trình trở thành $1!+2!+3!=y^2.$ Suy ra $y^2=9.$ Do đó $y=\pm3.$ Vì thế phương trình có nghiệm $\left(3,3\right),\left(3,-3\right).$

- Nếu $x=4$ thì phương trình trở thành $1!+2!+3!+4!=y^2.$ Suy ra $y^2=33.$ Do đó $y=\pm\sqrt{33}.$ Vì thế phương trình vô nghiệm.

- Nếu $x\ge5$ thì từ $5!,6!,7!,\cdots,x!$ đều có tận cùng là 0. Do đó $1!+2!+3!+4!+\cdots+x!$ có tận cùng là 3. Mặt khác y^2 không có tận cùng là 3. Suy ra phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có các nghiệm $\left(1,1\right),\left(1,-1\right),\left(3,3\right),\left(3,-3\right).$

Từ Ví dụ 8 chúng ta có thể khái quát hoá bài toán theo nhiều cách.

Cách 1. *Cho số mũ của y là một số chẵn. Ta có bài toán sau:*

Ví dụ 9: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $1!+2!+\cdots+x!=y^{2z},$ với z là số tự nhiên khác 0.

Giải: Ta có $y^{2z}=\left(y^z\right)^2.$ Đặt $y^z=t.$ Khi đó phương trình trở thành

$1!+2!+\cdots+x!=t^2$ (*).

Lập luận tương tự Ví dụ 3 ta có:

- Nếu $x=1$ thì phương trình (*) trở thành $1!=t^2.$ Suy ra $t=\pm1.$ Suy ra $y^z=1$ hoặc $y^z=-1.$

+ Nếu $y^z = 1$ thì $y = 1$ với mọi z là số tự nhiên khác 0 hoặc $y = -1$ với z chẵn.

+ Nếu $y^z = -1$ thì $y = -1$ và z lẻ.

Trong trường hợp này phương trình có nghiệm $(1,1,z),(1,-1,z)$.

- Nếu $x = 2$ thì phương trình trở thành $1!+2!=t^2$. Suy ra $t^2 = 3$. Hay $t = \pm\sqrt{3}$. Do đó phương trình vô nghiệm.

- Nếu $x = 3$ thì ta có $1!+2!+3!=t^2$. Suy ra $t^2 = 9$. Hay $t = \pm 3$. Suy ra $y^z = 3$ hoặc $y^z = -3$. Nếu $y^z = 3$ thì $y = 3$ và $z = 1$; Nếu $y^z = -3$ thì $y = -3$ và $z = 1$;

Vì thế phương trình có nghiệm $(3,3,1),(3,-3,1)$.

- Nếu $x = 4$ thì ta có $1!+2!+3!+4!=y^2$. Suy ra $t^2 = 33$. Hay $t = \pm\sqrt{33}$. Vì thế phương trình vô nghiệm.

- Nếu $x \ge 5$ thì từ $5!, 6!, 7!, \cdots, x!$ đều có tận cùng là 0. Do đó $1!+2!+3!+4!+\cdots+x!$ có tận cùng là 3. Mặt khác t^2 không có tận cùng là 3. Suy ra phương trình vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình là $(3,3,1)$, $(3,-3,1)$, $(1,1,z),(1,-1,z)$.

Cách 2: *Cho số mũ của y là một số lẻ. Ta có bài toán sau:*

Ví dụ 10: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $1!+2!+\cdots+x!=y^{2z+1}$, với z là số tự nhiên khác 0.

Giải: Đặt $A = 1!+2!+\cdots+x!$. Ta xét trường hợp $x \ge 5$.

Do $1!+2!+3!+4!=33$, từ $5!, 6!, \cdots, x!$ đều chia hết cho 3. Suy ra $A = 1!+2!+\cdots+x!$

chia hết cho 3. Vì thế y^{2z+1} chia hết cho 3. Do đó $y \vdots 3$. Hay $y = 3t$. Do đó $y^{2z+1} = (3t)^{2z+1} \vdots 3^3$.

+ Với $x = 5$ thì $A = 153 = 3^2.17$ không chia hết cho 3^3. Suy ra phương trình vô nghiệm.

+ Với $x = 6$ thì $A = 873 = 3^2.97$ không chia hết cho 3^3. Suy ra phương trình vô nghiệm.

+ Với $x = 7$ thì $A = 5913 = 3^3.(3.73)$ chia hết cho 3^3. Nhưng 3.73 không có dạng t^{2z+1} (do $2z+1 \ge 3$). Suy ra phương trình vô nghiệm.

+ Với $x = 8$ thì $A = 5913 + 40320 = 3^3.3.73 + 3^2.2^7.7.5$ không chia hết cho 3^3. Suy ra phương trình vô nghiệm.

+ Với $x \ge 9$ thì $9!+10!+\cdots+x!$ chia hết cho 3^3. Mà $1!+2!+\cdots+8!$ không chia hết cho 3^3. Suy ra $1!+2!+\cdots+9!+10!+\cdots+x!$ không chia hết cho 3^3. Suy ra phương trình vô nghiệm.

Do đó với $5 \le x$ thì phương trình vô nghiệm. Vì thế ta chỉ xét các trường hợp $x \le 4$.

- Nếu $x = 1$ thì $y^{2z+1} = 1$. Suy ra $y = 1$ với mọi z là số tự nhiên khác 0. Vậy nghiệm của phương trình là $(1,1,z)$.

- Nếu $x = 2$ thì $y^{2z+1} = 3$. Suy ra $y = 3$ và $2z+1 = 1$. Vô lý vì $2z+1 > 1$. Do đó phương trình vô nghiệm.

- Nếu $x = 3$ thì $y^{2z+1} = 9 = 3^2$. Vì $2z+1 \ge 3$. Suy ra phương trình vô nghiệm.

- Nếu $x = 4$ thì $y^{2z+1} = 33$. Vì $2z+1 \ge 3$. Suy ra phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm là $(1,1,z)$.

Cách 3: Cho số mũ của y là một số bất kì. Ta có bài toán sau.

Ví dụ 11: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $1!+2!+\cdots+x!=y^z$, với z là số tự nhiên khác 0.

Để giải phương trình này, ta xét các trường hợp $z = 2k$, $z = 2k+1$.

3. KẾT LUẬN

Nội dung bài báo trình bày vấn đề rèn luyện các thao tác tư duy đặc biệt hoá, tương tự hoá, khái quát hoá cho học sinh khi dạy học về phương trình nghiệm nguyên. Trong bài báo, qua việc phân tích một số bài toán giải phương trình nghiệm nguyên, chúng tôi đưa ra những gợi ý giúp giáo viên có thể rèn luyện các thao tác tư duy đặc biệt hoá, tương tự hoá, khái quát hoá cho học sinh nhằm giúp học sinh có kỹ năng giải quyết một lớp các bài toán, cũng như có thể tự đề xuất các bài toán mới khó hơn. Từ đó góp phần phát triển năng lực tư duy cho người học, đồng thời nâng cao chất lượng dạy và học ở trường phổ thông.

REFERENCES

[1] Hoang Chung (1978), *Methods of teaching Maths*, Viet Nam Education Publishing House, Ha Noi.

[2] V. A. Cruchetxki (1973), *Psychology of Mathematical ability of students*, Viet Nam Education Publishing House, Ha Noi

[3] Nguyen Ba Kim (2015), *Methods of teaching Maths*, University of Education Publishing House, Ha Noi.

[4] G. Polya (2010), *Mathematics and logical reasoning*, Viet Nam Education Publishing House, Ha Noi.

[5] Chu Cam Tho (2014), *Developing thinking through teaching Mathematics in high school*, University of Education Publishing House, Ha Noi.

[6] Đao Van Trung (1996*), How to learn Maths well in high school*, Viet Nam Education Publishing House, Ha Noi.

[7] Nguyen Quang Uan (2010), *Collection of psychological - educational studies*, University of Education Publishing House, Ha Noi.