No.21_June 2021 |p.62-72

TẠP CHÍ KHOA HỌC ĐẠI HỌC TÂN TRÀO
ISSN: 2354 - 1431
http://tckh.daihoctantrao.edu.vn/

EXTENDING SOME RESULTS OF FLAT GEOMETRY WHEN SOLVING SPATIAL GEOMETRY

*Le Thieu Trang[1],**

[1]Tan Trao University, Vietnam

**Email address: lttrang0466@tuyenquang.edu.vn*

http://doi.org/10.51453/2354-1431/2021/510

Article info

Recieved:
9/3/2021
Accepted:
3/5/2021

Keywords:
Flat Geometry, Geometry of space, Equality, Prove, Similar.

Abstract:

In spatial geometry content, apart from math problems proving specific properties, problems proving geometric equality, geometric inequality, geometrical extremes ... are difficult problems for students in the learning process, in exams, especially in exams for excellent students and Math Olympiad. These types of math are closely related to the results of flat geometry that students have learned at secondary school. In this article, some typical mathematical forms of geometric equality in space using the results of flat geometry have been chosen to engrave and apply knowledge of flat geometry to help students see general results when expanding space.

No.21_June 2021 |p.62-72

TẠP CHÍ KHOA HỌC ĐẠI HỌC TÂN TRÀO
ISSN: 2354 - 1431
http://tckh.daihoctantrao.edu.vn/

MỞ RỘNG MỘT SỐ KẾT QUẢ CỦA HÌNH HỌC PHẲNG KHI GIẢI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Lê Thiếu Tráng[1,]*

[1]Trường Đại học Tân Trào, Việt Nam

**Địa chỉ email: lttrang0466@tuyenquang.edu.vn*

http://doi.org/10.51453/2354-1431/2021/510

Thông tin bài viết

Ngày nhận bài:
9/3/2021
Ngày duyệt đăng:
3/5/2021

Từ khóa:
Hình học phẳng, hình học không gian, đẳng thức, chứng minh, tương tự.

Tóm tắt

Trong nội dung hình học không gian, ngoài các bài toán chứng minh các tính chất đặc thù thì các bài toán chứng minh đẳng thức hình học, bất đẳng thức hình học, cực trị hình học,... là các bài toán khó đối với học sinh, sinh viên trong quá trình học tập, trong các kì thi, đặc biệt các kì thi học sinh giỏi, Olympic Toán. Các dạng toán này có mối liên hệ chặt chẽ với các kết quả hình học phẳng mà học sinh, sinh viên đã được học ở bậc THCS. Trong bài biết này, tác giả lựa chọn một số dạng toán tiêu biểu về đẳng thức hình học trong không gian sử dụng kết quả hình học phẳng, nhằm khắc sâu và vận dụng kiến thức hình học phẳng, giúp học sinh, sinh viên nhìn nhận kết quả tổng quát khi mở rộng chiều không gian.

1- GIỚI THIỆU

Trong chương trình hình học không gian lớp 8, lớp 11 bậc phổ thông và học phần hình học sơ cấp bậc đại học, có nhiều bài toán về đẳng thức hình học, đây là những bài toán khó đối với học sinh, sinh viên, chúng có mối liên hệ chặt chẽ, mà thực ra là sự mở rộng chiều không gian (3 chiều) của hình học phẳng (2 chiều), nó cũng là việc sử dụng Tiên đề 6 của hình học không gian (Theo SGK phổ thông): "Trong mỗi mặt phẳng, các kết quả hình học phẳng đều đúng".

Qua bài viết này, với mục đích của tác giả là vừa ôn tập, khắc sâu những kết quả hình học phẳng, vừa sử dụng chúng trong một số bài toán hình học không gian, ngoài ra còn giúp người học tự tìm được các tính chất, bài toán tương tự khi mở rộng chiều không gian.

2. MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG

Bài toán 1. Cho ΔABC, M là điểm bất kỳ trên đoạn BC. Một đường thẳng d cắt AB, AC, AM lần lượt tại các điểm B', C', M', thì ta có:

$$MC.\frac{AB}{AB'}+MB.\frac{AC}{AC'}=BC.\frac{AM}{AM'}.$$

Chứng minh: Hình 1. Qua B và C kẻ các đường thẳng BM_1 *và* CM_2 song song với d. Dễ thấy $\Delta BMM_1 \sim \Delta CMM_2$, nên:

$$BM.MM_2=CM.MM_1.$$

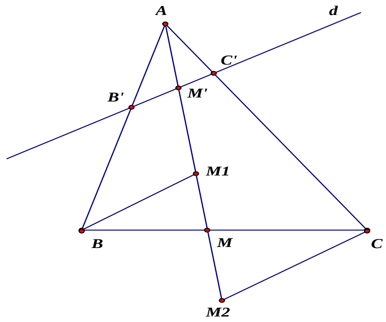
Theo Thales ta có: $\frac{AB}{AB'}=\frac{AM_1}{AM'}$ và $\frac{AC}{AC'}=\frac{AM_2}{AM'}$.

Vậy: $MC.\frac{AB}{AB'}+MB.\frac{AC}{AC'}=MC.\frac{AM_1}{AM'}+MB.\frac{AM_2}{AM'}$

$$=\frac{MC.AM_1+MB.AM_2}{AM'}$$

$$=\frac{MC\left(AM+MM_1\right)+MB\left(AM-MM_2\right)}{AM'}$$

$$=\frac{AM\left(MB+MC\right)}{AM'}=BC.\frac{AM}{AM'}$$.đpcm.



Hình 1

''Bài toán 2. Cho ΔABC, một điểm M nằm trong tam giác. Gọi $A'=AM\cap BC$, $B'=BM\cap AC$, $C'=CM\cap AB$, thì ta có:

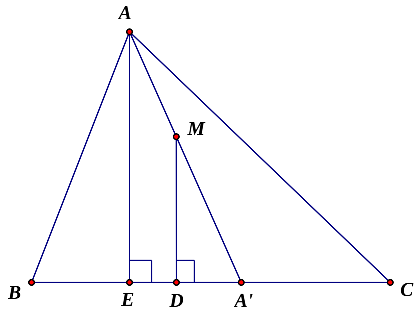
$$\frac{A'M}{A'A}+\frac{B'M}{B'B}+\frac{C'M}{C'C}=1.$$

Chứng minh: Hình 2. Kẻ MD và AE vuông góc với BC.

Ta có: $\frac{S_{BMC}}{S_{ABC}}=\frac{MD}{AE}=\frac{A'M}{A'A}$.

Tương tự ta cũng có: $\frac{S_{CMA}}{S_{ABC}}=\frac{B'M}{B'B}$ và $\frac{S_{AMB}}{S_{ABC}}=\frac{C'M}{C'C}$. Cộng 3 đẳng thức trên ta được:

$$\frac{A'M}{A'A}+\frac{B'M}{B'B}+\frac{C'M}{C'C}=\frac{S_{AMB}+S_{BMC}+S_{CMA}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=1.$$



Hình 2

Bài toán 3. Cho đường thẳng AB và một điểm M. Điều kiện cần và đủ để điểm $O\in AB$ là tồn tại cặp số thực $(x;y)$ sao cho: $\overrightarrow{MO}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$, với $x+y=1$.

Chứng minh.

+ *Điều kiện cần*: Nếu $O\in AB$ thì $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ cùng phương, nên tồn tại số thực $k\neq 1$ (do A, B phân biệt) sao cho:

$$\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MO}=k\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MO}\right)\Leftrightarrow\left(k-1\right)\overrightarrow{MO}=-\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{MO}=\frac{-1}{k-1}\overrightarrow{MA}+\frac{k}{k-1}\overrightarrow{MB}.$$

Đặt $x=\frac{-1}{k-1}$; $y=\frac{k}{k-1}$ thì ta có:

$\overrightarrow{MO}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$, với $x+y=1$.

+ *Điều kiện đủ*: Nếu $\overrightarrow{MO}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$, với $x+y=1$, thì thay $y=1-x$ vào đẳng thức vectơ ta có:

$$\overrightarrow{MO}=x\overrightarrow{MA}+\left(1-x\right)\overrightarrow{MB}=x\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)+\overrightarrow{MB}$$

.

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{MB}=x\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow\overrightarrow{BO}=x\overrightarrow{BA}$, tức là hai vectơ $\overrightarrow{BO}$ và $\overrightarrow{BA}$ cùng phương, hay điểm O thuộc đường thẳng AB.

Bằng cách lập luận tương tự bởi sự đồng phẳng của ba vectơ, trong không gian ta cũng có: Trong không gian cho mp(ABC) và một điểm M. Điều kiện cần và đủ để điểm $O\in(ABC)$ là tồn tại bộ số thực $(x;y;z)$ sao cho: $\overrightarrow{MO}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}+z\overrightarrow{MC}$, với $x+y+z=1$.

Bài toán 4. *Định lí côsin suy rộng:* Cho ΔABC với $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ và diện tích S, ta có:

$$\cot A=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S};\ \cot B=\frac{c^2+a^2-b^2}{4S};\ \cot C=\frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$$

Chứng minh. Từ định lí cosin cho ΔABC ta có:

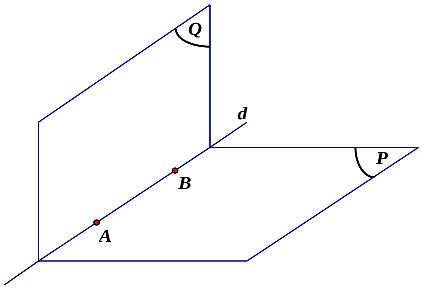
$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A=b^2+c^2-4\left(\frac{1}{2}bc.\sin A\right).\cot A=b^2+c^2-4S\cot A$$

$\Rightarrow \cot A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{4S}$. Các đẳng thức còn lại chứng minh tương tự.

Bài toán 5. *Dựng giao tuyến hai mặt phẳng.*

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau. Xác định giao tuyến d = (P) ∩ (Q).

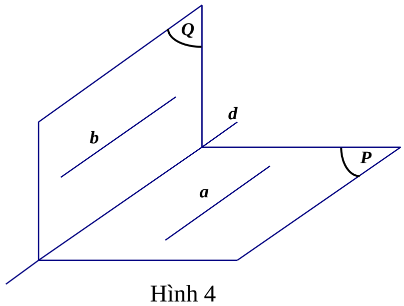
Phương pháp 1. Xác định được 2 điểm A, B phân biệt thuộc đồng thời (P) và (Q), thì $d \equiv AB$ (hình 3).



Hình 3

Phương pháp 2. Xác định được một điểm A thuộc đồng thời hai mặt phẳng và biết phương giao tuyến l, thì d là đường thẳng đi qua A và có phương l.

Phương l xác định nhờ định lí giao tuyến hoặc hệ quả của nó: "Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song, thì giao tuyến (nếu có) của chúng song song hai đường thẳng đó" (hình 4).



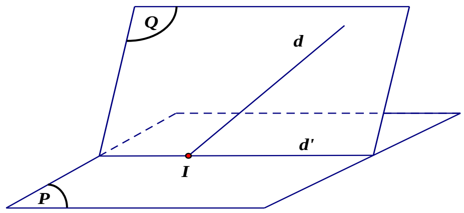
Hình 4

Bài toán 6. *Xác định giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng.*

Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng d cắt nhau. Xác định giao điểm $I=(P)\cap d$.

Phương pháp: Xác định một đường thẳng $d' \subset (P)$ mà $d' \cap d = I$, thì $I \in d' \subset (P)$ và $I \in d \Rightarrow I = d \cap (P)$.

Nếu không xác định được ngay d', ta có thể tìm một mp(Q) chứa d và cắt mp(P), thì $d'=(P)\cap(Q)$ (hình 5).

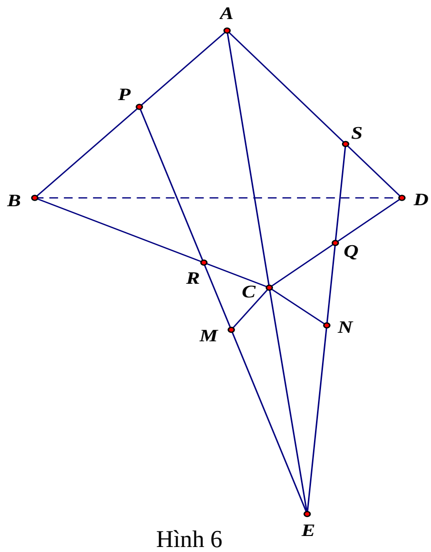


Hình 5

3. MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1. Cho tứ diện $ABCD$, gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD, điểm $R \in BC$ sao cho $BR=2RC$. Gọi $S=AD\cap(PQR)$. Chứng minh $AS=2SD$.

Phân tích: Trước hết phải dựng điểm $S=AD\cap(PQR)$. Ta phân tích như sau: Từ $AS=2SD$ và $QC=QD$, nên dựng $CN//AS$, $N\in SE$. Khi đó $\Delta QSD=\Delta QNC \Rightarrow CN=SD$. Để có đpcm thì $AS=2CN$, tức là CN là đường trung bình của $\Delta EAS \Rightarrow CE=CA$. Tiếp tục suy luận như vậy nhờ $BR=2RC$ và $PA=PB$, nên dựng $CM//AB$, $M\in EP \Rightarrow \Delta CRM \sim \Delta BRP$ tỉ số $\frac{1}{2}$, nhờ suy luận ngược, có lời giải.



Hình 6

Giải: Hình 6.

+ Dựng $S=AD\cap(PQR)$*:* Từ giả thiết ta thấy PR không song song với $AC \Rightarrow PR\cap AC=E$. Hai mặt phẳng ($PQR$) và ($ACD$) có 2 điểm chung phân biệt là E và Q nên $(PQR)\cap(ACD)=EQ$. Trong mp(ACD) thì $EQ\cap AD=S \Rightarrow S=AD\cap(PQR)$.

+ Chứng minh $AS=2SD$: Kẻ $CM//AB$, $CN//AD$. Ta có: $\Delta RPB \sim \Delta RCM$ tỉ số 2. Vì $PA=PB \Rightarrow CM$ là đường trung bình của $\Delta EAP \Rightarrow CA=CE \Rightarrow CN$ là đường trung bình của $\Delta EAS \Rightarrow AS=2CN$. Mặt khác do $\Delta CNQ=\Delta DSQ$ nên $AS=2SD$.

Nhận xét: Đây là một đẳng thức hình học dạng đơn giản, nhưng ý tưởng khá hay khi dùng phương pháp phân tích đi lên. Trong bài toán trên, kiến thức hình học phẳng sử dụng khá đơn giản về tam giác đồng dạng, tam giác bằng nhau và tính chất đường trung bình của tam giác được sử dụng trong từng mặt phẳng cụ thể.

- Trong khi giảng dạy ta phân tích bài toán theo kiểu phân tích đi lên:

$$A_0 \Leftarrow A_1 \Leftarrow A_2$$

A_0: AS=2SD, do Q trung điểm CD để kẻ CN//AS dẫn đến C là trung điểm AK.

A_1: $\Delta CNQ=\Delta DSQ$ (đồng dạng tỉ số 1)

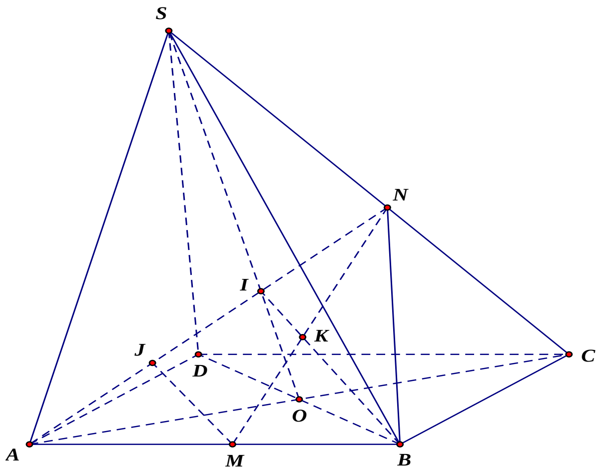
A_2: C là trung điểm AK dẫn đến kẻ CM//SA để suy ra $\Delta RPB \sim \Delta RCM$ tỉ số 2.

- Trong lập luận $\Delta CNQ=\Delta DSQ$ (hay đồng dạng tỉ số 1), có thể thay Q là trung điểm CD bằng một tỉ số khác, ta sẽ có đẳng thức mới, đó cũng chính là bài toán tổng quát: R và Q lần lượt chia các đoạn BC và CD theo các tỉ số k và l.

- Cũng có thể dựng S bằng cách khác: Gọi $K=RQ\cap BD$, thì $S=KP\cap AD$.

Bài 2. Cho hình chóp *S.ABCD*, đáy là hình bình hành. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *AB* và SC. Gọi *I* và *K* lần lượt là giao điểm của *AN* và *MN* với mp(*SBD*). Tính các tỉ số: $\frac{IA}{IN}, \frac{KM}{KN}, \frac{IB}{IK}$.

Phân tích:Trước hết ta phải dựng đúng các giao điểm của đường thẳng AN, AM với mp(SBD), là điều kiện tiên quyết để giải bài toán. Để tính các tỉ số sẽ dựa vào tính chất các điểm, các đường đặc biệt trong tam giác, định lí Thales...



Hình 7

Giải:

+ Dựng *I, K*: Gọi $O=AC\cap BD$. Trong mp(*SAC*) ta có: $AN\cap SO=I$. Do $SO\subset(SBD)$ nên $I=AN\cap(SBD)$.

Trong mp(*ANB*): $K=MN\cap IB$. Do $IB\subset(SBD)$ nên $K=MN\cap(SBD)$.

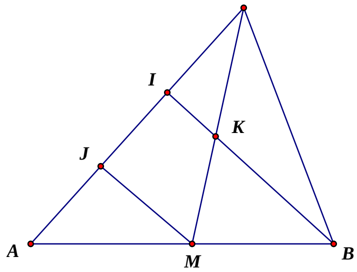
+ Tính các tỉ số:

* $\frac{IA}{IN}$: Phân tích: Đây là một đẳng thức đơn giản dạng ẩn (chưa biết giá trị), ta cần xét cụ thể tam giác (mặt phẳng) chứa các đoạn thẳng này, từ đó dựa vào giả thiết *N* trung điểm của *SC, O* trung điểm của *AC*. Ta thấy: Do *N* trung điểm *SC* và *O* trung điểm *AC* nên *I* là trọng tâm $\Delta SAC \Rightarrow \frac{IA}{IN}=2$.

* $\frac{KM}{KN}$: Phân tích: Tìm hướng giải như ý trên, nhưng phải để ý các tỉ số đã biết, để đạt được mục đích, ta cần kẻ đường phụ để sử dụng Định lí Thales, ta có lời giải (hình 8):

Gọi *J* là trung điểm của *IA*. Do *M* trung điểm *AB* nên *JM* là đường trung bình của $\Delta AIB \Rightarrow JM // IB$. Trong ΔNJM có:

IK //JM và *J* trung điểm *NJ* nên *K* là trung điểm của *MN*. Vậy $\frac{KM}{KN}=1$.



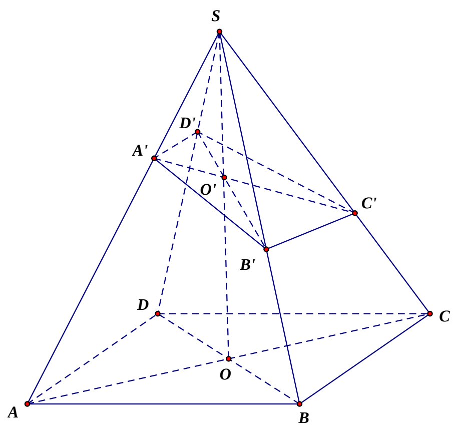
Hình 8

* $\frac{IB}{IK}$: Tỉ số này thực ra chỉ là hệ quả của kết quả trên. Trong ΔNJM có: $IK=\frac{1}{2}JM$. Trong ΔABC có: $JM=\frac{1}{2}IB$. Vậy $\frac{IB}{IK}=4$.

Nhận xét: Qua hai bài toán trên, mặc dù đó là các đẳng thức hình học dạng đơn giản nhất, nhưng ta thấy, điều cốt yếu là phải dựng đúng giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng (liên quan đến bài toán dựng giao tuyến hai mặt phẳng), sau đó suy luận từ các kết quả hình học phẳng trong từng mặt phẳng cụ thể để có kết quả mong muốn. Tuy nhiên đây là các kiến thức mở đầu quan trọng ta sẽ ứng dụng cho các bài tiếp theo.

Bài 3. Cho hình chóp *S.ABCD*, đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng (*P*) cắt các cạnh *SA*, *SB*, *SC*, *SD* lần lượt tại *A', B', C', D'*. Chứng minh đẳng thức: $\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}$.

Phân tích: Ta thấy các biểu thức ở mỗi vế nằm trong các tam giác là các mặt chéo, sau khi dựng được các giao tuyến, thì đó là kết quả đã có trong bài toán 1.



Hình 9

Giải: Hình 9.

Gọi $O=AC\cap BD$. Dễ thấy SO, $A'C'$, $B'D'$ đồng qui tại O'. Trong kết quả bài toán 1 thay điểm *M* bằng trung điểm *O* của các ΔSAC và ΔSBD ta có:

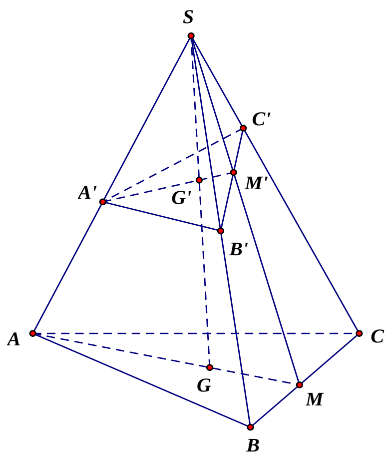
$$OC.\frac{SA}{SA'}+OA.\frac{SC}{SC'}=AC.\frac{SO}{SO'}\Leftrightarrow\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=2\frac{SO}{SO'}$$

và $$OB.\frac{SD}{SD'}+OD.\frac{SB}{SB'}=BD.\frac{SO}{SO'}\Leftrightarrow\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}=2\frac{SO}{SO'}$$

Vậy $\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}$.đpcm.

Nhận xét: Qua bài 3, giúp người học thấy rõ việc sử dụng kết quả hình học phẳng trong không gian. Từ đó có thể suy luận và chứng minh các đẳng thức hình học trong không gian phức tạp hơn. Trong bài toán trên, ta đã sử dụng phép chiếu song song theo phương l lên đường thẳng SO. Học sinh, sinh viên có thể suy luận tổng quát hơn qua các bài toán sau:

Bài 4. Cho tứ diện *SABC*, *G* là trọng tâm ΔABC. Một mặt phẳng (*P*) cắt *SA*, *SB*, *SC*, *SG* lần lượt tại *A', B', C', G'*. Chứng minh đẳng thức: $\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=3.\frac{SG}{SG'}$.



Hình 10

Giải: Hình 10. Trong các ΔABC, ΔSBC, ΔSAM ta có: $AG\cap BC=M$; $SM\cap B'C'=M'$; $A'M'\cap SG=G'$. Áp dụng kết quả bài toán 1:

- Trong ΔSBC với $MB=MC=\frac{1}{2}BC$ nên:

$$MC.\frac{SB}{SB'}+MB.\frac{SC}{SC'}=BC.\frac{SM}{SM'}.$$

$$\Leftrightarrow\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=2.\frac{SM}{SM'}\ (1)$$

- Với ΔSAM với $GM=\frac{1}{3}AM$, $GA=\frac{2}{3}.AM$ nên:

$$GM.\frac{SA}{SA'}+GA.\frac{SM}{SM'}=AM.\frac{SG}{SG'}.$$

$\Leftrightarrow \frac{SA}{SA'} + 2.\frac{SM}{SM'} = 3.\frac{SG}{SG'}$ (2).

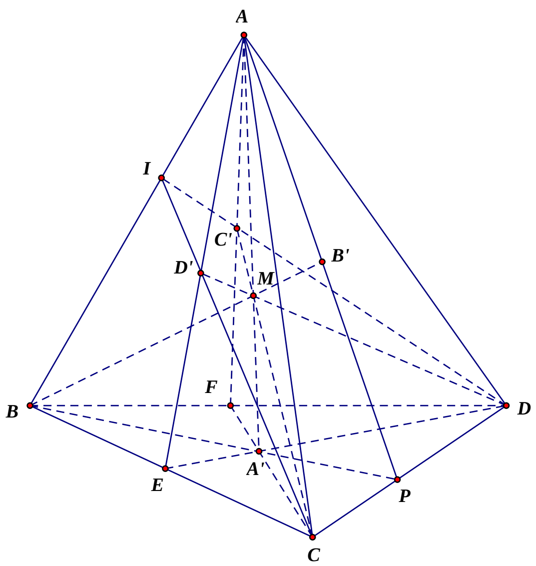
Cộng (1) với (2) ta có: $\frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} + \frac{SA}{SA'} + 2.\frac{SM}{SM'} = 2.\frac{SM}{SM'} + 3.\frac{SG}{SG'}$.

Hay: $\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3.\frac{SG}{SG'}$.đpcm.

Bài 5. Cho tứ diện *ABCD*, *M* là một điểm trong tứ diện. Gọi *A'*=*AM*∩(*BCD*), *B'*=*BM*∩(*ACD*), *C'*=*CM*∩(*ABD*), *D'*=*DM*∩(*ABC*). Chứng minh đẳng thức:

$$\frac{A'M}{A'A} + \frac{B'M}{B'B} + \frac{C'M}{C'C} + \frac{D'M}{D'D} = 1.$$

Phân tích: Đẳng thức cần chứng minh ta thấy rất tương tự kết quả bài toán 2 trong hình học phẳng, do đó chúng ta sẽ qui về các tam giác theo từng tỉ số cần xác định, những tỉ số còn thiếu ta cần thêm kiến thức hình học không gian để qui về hình học phẳng. Cụ thể ta có:



Hình 11

Giải. Hình 11.

+ Dựng các điểm *B'*, *C'*, *D'*: Gọi *P*=*BA'*∩*CD*, *E*=*DA'*∩*BC*, *F*=*CA'*∩*BD*. Nối *AP*, *AE*, *AF*. Trong các mặt phẳng (*ABP*), (*ACF*), (*ADE*) ta có: *B'*=*BM*∩*AP*; *C'*=*CM*∩*AF*; *D'*=*DM*∩*AE*.

+ Chứng minh đẳng thức: Dễ thấy *CD'*, *PM*, *DC'* đồng quy tại điểm $I \in AB$.

Áp dụng kết quả bài toán 2:

Trong Δ*CID*: $\frac{MP}{IP} + \frac{MD'}{DD'} + \frac{MC}{CC'} = 1$ (1); Trong Δ*ABP*:

$\frac{IM}{IP} + \frac{MB'}{BB'} + \frac{MA'}{AA'} = 1$ (2)

Vì *MP*+*MI*=*PI*, nên cộng (1) và (2) ta có:

$$\frac{MP}{IP} + \frac{MD'}{DD'} + \frac{MC}{CC'} + \frac{IM}{IP} + \frac{MB'}{BB'} + \frac{MA'}{AA'} = 2 \Leftrightarrow \frac{A'M}{A'A} + \frac{B'M}{B'B} + \frac{C'M}{C'C} + \frac{D'M}{D'D} = 1.$$

Nhận xét: Ta thấy, trong bài hình học phẳng sử dụng phương pháp diện tích, do vậy khi mở rộng không gian sang 3 chiều, ta hoàn toàn có thể dùng phương pháp thể tích, đó cũng là một cách suy luận phương pháp khi mở rộng chiều trong không gian. Cụ thể:

Kẻ *AH* và *MK* cùng vuông góc mp(*BCD*), thì: $\frac{A'M}{A'A} = \frac{MK}{AH} = \frac{V_{MBCD}}{V_{ABCD}}$.

Tương tự ta cũng có: $\frac{B'M}{B'B} = \frac{V_{MACD}}{V_{BACD}}$; $\frac{C'M}{C'C} = \frac{V_{MABD}}{V_{CABD}}$; $\frac{D'M}{D'D} = \frac{V_{MABC}}{V_{DBAC}}$.

Cộng các đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Cách này lại nằm ở phần kiến thức sau, khi học sinh, sinh viên đã học đến phần thể tích. Cách thứ nhất áp dụng được trực tiếp kết quả hình học phẳng, hơn nữa chỉ cần

học xong phần giao tuyến hai mặt phẳng đã có thể giải quyết được.

Các bài toán trên hoàn toàn có thể làm bằng phương pháp thể tích, coi như một cách giải khác dành cho bạn đọc.

Bài 6. Cho tứ diện *OABC* có *OA=a, OB=b, OC=c* và đôi một vuông góc. Gọi *H* là trực tâm tam giác *ABC*.

1) Chứng minh: $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$;

2) Xét *A, B, C* là ba góc của tam giác *ABC*. Chứng minh $a^2tanA=b^2tanB=c^2tanC$;

3) Chứng minh $S_{ABC}^2=S_{OAB}^2+S_{OBC}^2+S_{OCA}^2$;

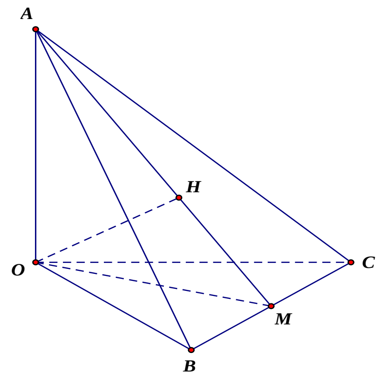
4) Cho *X* là một điểm tùy ý trong tam giác *ABC*. Chứng minh:

$$\frac{XA^2}{OA^2}+\frac{XB^2}{OB^2}+\frac{XC^2}{OC^2}=2+\frac{XH^2}{OH^2}.$$

Phân tích: Các đẳng thức 1, 3 ta thấy hoàn toàn tương tự trong tam giác vuông, cho nên việc suy luận theo hướng các bài trên là không khó. Đối với đẳng thức 3, gợi ý đến định lí cosine suy rộng. Đẳng thức 4 cần phân tích kĩ hơn, nhưng có một gợi ý là điểm X tùy ý trong mp(ABC) để kết nối với bài toán 3.

Giải.

1) Chứng minh: $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$ (hình 12).



Hình 12

Dễ dàng chứng minh được *OH*⊥(*ABC*). Trong các tam giác vuông *OBC* và *AOM* ta có:

$$\frac{1}{OM^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \text{ và } \frac{1}{OH^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{OM^2}.$$

Do đó: $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$.

2) Chứng minh $a^2tanA=b^2tanB=c^2tanC$: Gọi *S* là diện tích Δ*ABC*. Áp dụng định lí cosine suy rộng bài toán 4 cho Δ*ABC* ta có:

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.cosA \Leftrightarrow b^2+c^2=a^2+b^2+a^2+c^2-2AB.AC.cosA$$

$$\Leftrightarrow a^2=AB.AC.cos\,A \Leftrightarrow a^2=2\left(\frac{1}{2}AB.AC\sin A\right).cot\,A$$

$$\Leftrightarrow a^2=2S.cot\,A \Leftrightarrow a^2\tan A=2S.$$

Chứng tương tự ta cũng có: $b^2\tan B=2S;\ c^2\tan C=2S.$

Vậy: $a^2tanA=b^2tanB=c^2tanC$ (=$2S_{ABC}$).

2) Chứng minh $S_{ABC}^2=S_{OAB}^2+S_{OBC}^2+S_{OCA}^2$ (hình 13):

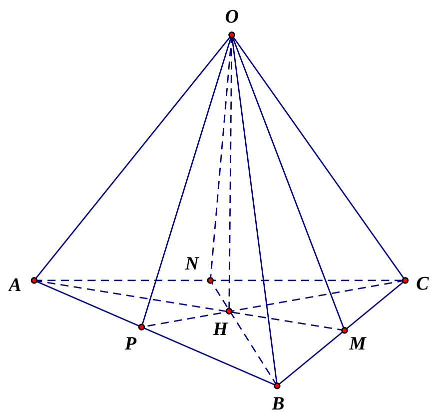
Cách 1: Ta có: $BC=\sqrt{b^2+c^2}$; $OM=\dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$;

$$AM=\sqrt{OA^2+OM^2}=\sqrt{a^2+\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}}=\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}.$$

Nên $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}BC.AM=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$.

Mặt khác: $S_{OAB}^2=\dfrac{1}{4}a^2b^2;\ S_{OBC}^2=\dfrac{1}{4}b^2c^2;\ S_{OCA}^2=\dfrac{1}{4}c^2a^2$.

Do đó: $S_{ABC}^2=S_{OAB}^2+S_{OBC}^2+S_{OCA}^2$.



Hình 13

Nhận xét: Đây chính là Định lý Pythagoras trong không gian. Với cách làm như trên chúng ta chưa thấy kết quả tương tự khi mở rộng không gian. Ta có thể chứng minh như sau, để thấy sự áp dụng trực tiếp kết quả hình học phẳng trong từng mặt phẳng.

Cách 2: Ta có: $BH \cap AC = N$, $CH \cap AB = P$. Ta đã có kết quả trong hình học phẳng cho tam giác vuông: *Trong một tam giác vuông, bình phương một cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với hình chiếu của nó trên cạnh huyền.*

Vậy đối với tứ diện vuông liệu ta có kết quả tương tự: *Trong một tam diện vuông, bình phương diện tích một mặt vuông, bằng diện tích mặt huyền nhân diện tích hình chiếu của nó lên mặt huyền*? Tức là liệu có: $S_{OAB}^2 = S_{ABC}.S_{AHB}$?

Ta có: $S_{OAB}^2 = S_{ABC}.S_{AHB} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}AB.OP\right)^2 = \left(\frac{1}{2}AB.CP\right).\left(\frac{1}{2}AB.HP\right)$

$\Leftrightarrow OP^2 = CP.HP$, đây chính là kết quả trong hình phẳng cho tam giác vuông COP, với cạnh huyền CP và hình chiếu của OP lên cạnh huyền là HP.

Tương tự: $S_{OBC}^2 = S_{ABC}.S_{BHC}$, $S_{OCA}^2 = S_{ABC}.S_{CHA}$.

Cộng các đẳng thức trên ta được: $S_{OAB}^2 + S_{OBC}^2 + S_{OCA}^2 = S_{ABC}\left(S_{AHB} + S_{BHC} + S_{CHA}\right) = S_{ABC}^2$.

Như vậy khẳng định trên trong không gian là đúng. Việc mở rộng trong không gian các kết quả tương tự trong tam giác vuông dành cho bạn đọc.

4) Chứng minh: $\frac{XA^2}{OA^2} + \frac{XB^2}{OB^2} + \frac{XC^2}{OC^2} = 2 + \frac{XH^2}{OH^2}$ (hình 14).

Ta có: $\overrightarrow{OX} = x.\overrightarrow{OA} + y.\overrightarrow{OB} + z.\overrightarrow{OC}$ và $x+y+z=1$ (Do điểm X nằm trong ΔABC).

$$\Rightarrow x.\overrightarrow{OA}^2 = x.\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA} = \left(\overrightarrow{OX} - y.\overrightarrow{OB} - z.\overrightarrow{OC}\right).\overrightarrow{OA}$$

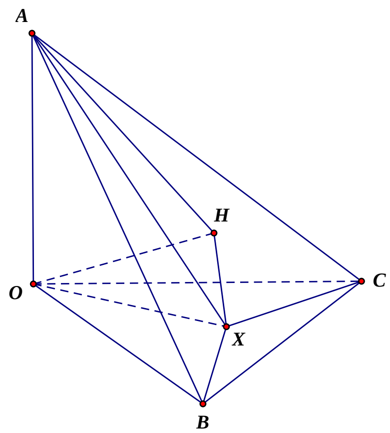
$$= \overrightarrow{OX}.\overrightarrow{OA} - y.\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} - z.\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OX}.\overrightarrow{AO}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left|\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OX}\right|^2 - \left|\overrightarrow{OX}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AO}\right|^2\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left|\overrightarrow{AX}\right|^2 - \left|\overrightarrow{OX}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AO}\right|^2\right] = \frac{1}{2}\left(OX^2 + OA^2 - AX^2\right).$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{OX^2}{OA^2} - \frac{XA^2}{OA^2}\right).$$

Tương tự ta có: $y = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{OX^2}{OB^2} - \frac{XB^2}{OB^2}\right)$; $z = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{OX^2}{OC^2} - \frac{XC^2}{OC^2}\right)$.



Hình 14

Vì $x+y+z=1$ nên:

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{OX^2}{OA^2} - \frac{XA^2}{OA^2}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{OX^2}{OB^2} - \frac{XB^2}{OB^2}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{OX^2}{OC^2} - \frac{XC^2}{OC^2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 3 + \frac{OX^2}{OA^2} + \frac{OX^2}{OB^2} + \frac{OX^2}{OC^2} = 2 + \frac{XA^2}{OA^2} + \frac{XB^2}{OB^2} + \frac{XC^2}{OC^2}.$$

$$\Leftrightarrow 1 + OX^2.\left(\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}\right) = \frac{XA^2}{OA^2} + \frac{XB^2}{OB^2} + \frac{XC^2}{OC^2}$$

Do $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{OH^2}$ và $OX^2 = OH^2 + XH^2$.

Nên: $1 + \frac{OX^2}{OH^2} = \frac{XA^2}{OA^2} + \frac{XB^2}{OB^2} + \frac{XC^2}{OC^2} \Leftrightarrow 1 + \frac{OH^2 + HX^2}{OH^2} = \frac{XA^2}{OA^2} + \frac{XB^2}{OB^2} + \frac{XC^2}{OC^2}$

$$\Leftrightarrow 2 + \frac{HX^2}{OH^2} = \frac{XA^2}{OA^2} + \frac{XB^2}{OB^2} + \frac{XC^2}{OC^2}.\text{đpcm.}$$

Các bài tập tương tự:

Bài 1. Cho tứ diện *SABC*, *Q* là một điểm trong *ΔABC*. Kẻ *QA', QB', QC'* lần lượt song song với *SA, SB, SC* và tương ứng cắt các mặt (*SBC*), (*SCA*), (*SAB*) tại *A', B', C'*.

Chứng minh đẳng thức: $\frac{QA'}{SA}+\frac{QB'}{SB}+\frac{QC'}{SC}=1$.

HD. Chú ý cách dựng đúng các điểm *A', B', C'*. Sau đó dùng kết quả bài toán 2.

Bài 2. Cho hình bình hành *ABCD*. Qua các đỉnh *A, B, C, D* kẻ các tia *Ax, By, Cz, Dt* song song với nhau trong cùng một nửa không gian, với bờ là mp*(ABCD)*. Một mp(α) cắt các tia *Ax, By, Cz, Dt* lần lượt tại *A', B', C', D'*. Chứng minh: *A'B'C'D'* là hình bình hành và ta có đẳng thức: *AA'+CC'=BB'+DD'*.

HD. Dùng định lí giao tuyến để chứng minh *A'B'C'D'* là hình bình hành. Dùng tính chất đường trung bình của hình thang để có đẳng thức cần chứng minh.

Bài 3. Cho từ diện *ABCD*, gọi h_a, h_b, h_c, h_d lần lượng là khoảng cách từ *A, B, C, D* đến các mặt đối diện. *M* là một điểm tùy ý trong tứ diện, gọi *x, y, z, t* là khoảng cách tương ứng từ

M đến các mặt (*BCD*), (*ACD*), (*ABD*) và (*ABC*). Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{h_a}+\frac{y}{h_b}+\frac{z}{h_c}+\frac{t}{h_d}=1.$$

HD. Dùng phương pháp hình học phẳng như bài toán 2, hoặc tỉ số thể tích.

Bài 4. Cho tứ diện *ABCD*. Một mp(α) qua trọng tâm *G* của tứ diện và cắt *AB, AC, AD* lần lượt tại *B', C', D'*. Chứng minh $\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}=4$.

HD. Xem hình 15.

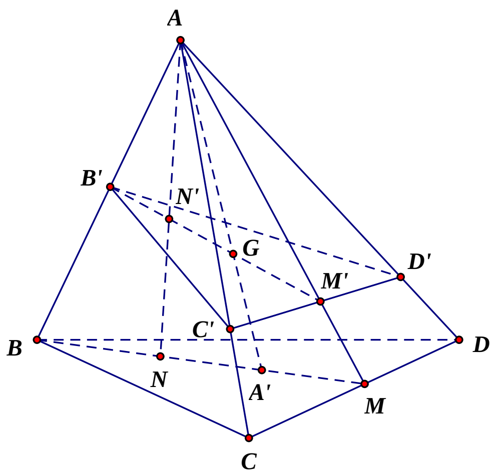
Gọi *A'=AG* ∩ (*BCD*) thì *A'* là trọng tâm Δ*BCD*, *M=BA'* ∩ *CD* thì *M* là trung điểm *CD*. Gọi *N* là trung điểm *BA'* và *N'=B'G* ∩ *AN*, *M'=AM* ∩ *C'D'*.

Áp dụng kết quả bài toán 1 cho các Δ*ACD*, Δ*ABA'*, Δ*AMN* ta có:

$$\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}=2\frac{AM}{AM'}\ (1)$$

$$\frac{AB}{AB'}+\frac{AA'}{AG}=2\frac{AN}{AN'}\ (2)$$

$$\frac{AM}{AM'}+\frac{AN}{AN'}=2\frac{AA'}{AG}\Leftrightarrow 2\frac{AM}{AM'}+2\frac{AN}{AN'}=4\frac{AA'}{AG}\ (3)$$



Hình 15

Cộng (1), (2), (3) ta có

$$\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}=3\frac{AA'}{AG}=3.\frac{4}{3}=3 \text{.đpcm.}$$

Bài 5. Cho tứ diện *ABCD*. Một điểm *M* bất kì nằm trong tứ diện. Gọi V_1, V_2, V_3, V_4 lần lượt là thể tích các khối *MBCD, MACD, MABD, MABC*.

a) Chứng minh:

$V_1.\overrightarrow{MA}+V_2.\overrightarrow{MB}+V_3.\overrightarrow{MC}+V_4.\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.

b) Với mọi điểm I ta có:

$V_1.\overrightarrow{IA}+V_2.\overrightarrow{IB}+V_3.\overrightarrow{IC}+V_4.\overrightarrow{ID}=V.\overrightarrow{IM}$, *V* là thể tích *ABCD*.

HD. Đây là mở rộng kết quả hình học phẳng trong không gian.Tham khảo qua bài toán: Cho ΔABC, một điểm M trong tam giác. Gọi S, S_a, S_b, S_c thứ tự là diện tích các tam giác ABC, MBC, MCA, MAB. Chứng minh: $S_a.\overrightarrow{MA}+S_b.\overrightarrow{MB}+S_c.\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ và với mọi điểm *I ta có:*

$S_a.\overrightarrow{IA}+S_b.\overrightarrow{IB}+S_c.\overrightarrow{IC}=S.\overrightarrow{IM}$. *Bạn đọc hãy mở rộng sang không gian.*

3- Kết luận

Trong bài viết tác giả đã tổng kết một số bài toán hình học không gian sử dụng kết quả hình học phẳng, mục đích giúp người học kết nối các tính chất tương tự khi chuyển từ không gian hai chiều sang ba chiều, từ đó phát triển tư duy trong quá trình học tập và nghiên cứu hình học không gian.

Qua thực tế giảng dạy chuyên đề trên, tôi nhận thấy học sinh và sinh viên đã làm tốt những yêu cầu đặt ra, tập dượt với với pháp tự học, tự nghiên cứu, tạo được hứng thú với môn học, đặc biệt là hình học không gian.

Các bài toán đẳng thức trong hình học phẳng và không gian còn gắn liền với các bài toán bất đẳng thức hình học, các điểm đặc biệt trong tam giác,... khi mở rộng không gian từ 2 chiều sang 3 chiều, các vấn đề tương tự dành cho bạn đọc tự nghiên cứu và trao đổi tiếp. Trong các chuyên đề sau, tác giả sẽ đề cập đến chủ đề này. Hi vọng rằng đây là những gợi ý tốt cho học sinh, sinh viên và giáo viên khi học tập và giảng dạy hình học không gian.

REFERENCES

[1] Ministry of Education and Training, Grade 11 Geometry, Viet Nam Education Publishing House, 2019.

[2] Cuong, V.N. (Editor)., Hung, H.N., Hung, D.M., Thai, H.T. (2005). Ministry of Education and Training, Secondary school Teacher training Project, Elementary Geometry and Practicing Math problems, Hanoi Pedagogical University Publishing House, Vietnam.

[3] Du, N.V., Nghia, T.Q., Truong, N.A. (1997). *Mathematical methods of spatital geometry for class 11*, Da Nang Plublising House, Vietnam.

[4] Quynh, D. (Editor in chief)., Cuong, V.N. (Editor)., Ban, P.K., Man, T. (2006). Grade 11 Geometry (Advanced), Viet Nam Education Publishing House, Vietnam.

[5] Thuy, V.D. (Editor)., Dam, N.N. (2006). Advanced Mathematics and Theme of Geometry Grade 8, Viet Nam Education Publishing House, Vietnam.