TẠP CHÍ KHOA HỌC ĐẠI HỌC TÂN TRÀO
ISSN: 2354 - 1431
http://tckh.daihoctantrao.edu.vn/

SOME APPLICATION OF NEWTON BINOMIAL IN THE HIGH SCHOOL PROGRAM

Nguyen Ke Tam[1,*], *Hoang Thi Yen*[2]
[1] *Quang Binh University, Quangbinh, Vietnam*
[2] *Luong Ninh Junior High School, Quangbinh, Vietnam*
**Email address: trongtien2000@gmail.com*
https://doi.org/10.51453/2354-1431/2021/523

Article info

Recieved:
28 /3/2021
Accepted:
03/5/2021

Keywords:
Newton binomial, derivative, integral, surplus, coefficient.

Abstract:

This article presents several applications of Newton's binomial theorem in the mathematics program for high school students; in particular, in simplifying mathematical expressions, finding coefficients of expansions, and finding remainders of divisions. Those are highly applied and applied mathematical problems appearing frequently in excellent-student exams and National high school graduation exams.

TẠP CHÍ KHOA HỌC ĐẠI HỌC TÂN TRÀO
ISSN: 2354 - 1431
http://tckh.daihoctantrao.edu.vn/

MỘT SỐ ỨNG DỤNG NHỊ THỨC NIU-TƠN TRONG CHƯƠNG TRÌNH TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Nguyễn Kế Tam[1,*], *Hoàng Thị Yến*[2]
[1] *Đại học Quảng Bình, Quảng Bình, Việt Nam*
[2] *Trường Trung học cơ sở Lương Ninh, Quảng Bình, Việt Nam*
**Email address: trongtien2000@gmail.com*
https://doi.org/10.51453/2354-1431/2021/523

Thông tin bài viết

Ngày nhận bài:
28 /3/2021
Ngày duyệt đăng:
03/5/2021

Từ khóa:
Nhị thức Niu-tơn, Đạo hàm, tích phân, số dư, hệ số.

Tóm tắt:

Bài báo trình bày các ứng dụng của nhị thức Niu-tơn trong chương trình trung học phổ thông, cụ thể là các bài toán về rút gọn biểu thức, tìm hệ số của khai triển và tìm số dư trong phép chia. Đây là những bài toán vận dụng và vận dụng cao, thường xuất hiện trong các kỳ thi học sinh giỏi và kỳ thi tốt nghiệp trung học phổ thông quốc gia.

1 GIỚI THIỆU

Việc khai triển các đa thức với số mũ cao luôn là vấn đề khó và được nhiều người làm toán, ứng dụng toán học quan tâm. Kết quả của việc khai triển đa thức $(a+b)^n$ được chứng minh bởi hai nhà toán học đó là: Nhà toán học và cơ học Isaac Newton đưa ra trong năm 1665; Nhà toán học James Gregory đưa ra trong năm 1670. Nhị thức Niu-tơn là một công cụ quan trọng trong việc khai triển các hằng đẳng thức có số mũ lớn, được các nhà toán học cũng như người làm toán sử dụng rộng rãi đến ngày nay. Nội dung nhị thức Niu-tơn xuất hiện trong chương trình lớp 11 trung học phổ thông và cũng được chọn trong phần đánh giá ở các kỳ thi học sinh giỏi hay kỳ thi tốt nghiệp trung học phổ thông. Tuy nhiên trong chương trình, phần nhị thức Niu-tơn chưa được trình bày một cách có hệ thống và chuyên sâu (xem [2, 3, 4]). Ngoài ra nhị thức Niu-tơn còn có những ứng dụng khác mà trong khuôn khổ bài báo này chúng tôi không đề cập (xem [5]). Nhằm giúp độc giả, các học sinh và giáo viên có một cách nhìn tổng quan về hệ thống bài tập có ứng dụng của nhị thức Niu-tơn, chúng tôi đã dành thời gian khảo sát và hệ thống các dạng bài tập là những ứng dụng của nhị thức Niu-tơn trong các kỳ thi học sinh giỏi lớp 11, 12 và kỳ thi tốt nghiệp trung học phổ thông quốc gia.

Theo [1] công thức khai triển nhị thức Niu-tơn được viết dưới hai dạng:

$$(a+\mathrm{b})^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \tag{1}$$

hoặc

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n b^n. \quad (2)$$

Từ các cách viết trên chúng tôi đưa ra các ứng dụng của nó trong việc giải các bài toán trong chương trình trung học phổ thông, cụ thể là các bài toán trong chương trình lớp 11, bồi dưỡng học sinh giỏi, thi tốt nghiệp trung học phổ thông quốc gia.

2 NỘI DUNG

2.1 Tính tổng của một biểu thức

Các bài toán dạng tính tổng của một biểu thức được giải bằng phương pháp khai triển nhị thức Niu-tơn thường xuất hiện dưới dạng tổng của nhiều số hạng trong đó các giá trị từng số hạng có sự tham gia của tổ hợp, chúng tôi đưa ra các ví dụ để có những góc quan sát khác nhau trong từng bài tập. Ví dụ dưới đây yêu cầu tính tổng của một biểu thức mà trong đó xuất hiện các tổ hợp, dựa vào công thức (2) để nhận thấy mối quan hệ giữa giá trị tổ hợp của bài ra và các hệ số trong khai triển nhị thức Niu-tơn. Từ đó đưa ra lời giải thích hợp.

Ví dụ 2.1. Rút gọn biểu thức:
a) $A = C_{2021}^0 + C_{2021}^1 + C_{2021}^2 + \cdots + C_{2021}^{2020} + C_{2021}^{2021}$,
b) $B = C_{2021}^0 + 2C_{2021}^1 + 2^2 C_{2021}^2 + \cdots + 2^{2020} C_{2019}^{2018} + 2^{2021} C_{2021}^{2021}$.

Giải.
a) Với biểu thức đã cho, ta thấy A là tổng các tổ hợp chập k của n phần tử mà không nhân hệ số kèm theo, do đó thực hiện khai triển:

$$(1+x)^{2021} = C_{2021}^0 + C_{2021}^1 x + C_{2021}^2 x^2 + \cdots + C_{2021}^{2021} x^{2021}. \quad (3)$$

Thay $x = 1$ vào đẳng thức (3) ta có

$$(1+1)^{2021} = C_{2021}^0 + C_{2021}^1 + C_{2021}^2 + \cdots + C_{2021}^{2021}.$$

Như vậy $A = 2^{2021}$.

b) Với biểu thức ở câu b) này, trước mỗi tổ hợp chập k của n phần tử còn được nhân một hệ số kèm theo quy luật tăng của chỉ số k. Tương ứng với đẳng thức (3) ta thay $x = 2$ khi đó

$$(1+2)^{2021} = C_{2021}^0 + C_{2021}^1 + C_{2021}^2 2^2 + \cdots + C_{2021}^{2021} 2^{2021}.$$

Từ đó ta có $B = 3^{2021}$.

Ví dụ này nhằm làm quen với công thức khai triển nhị thức Niu-tơn, quan sát quy luật xuất hiện của hệ số và tìm các biểu thức khai triển tương ứng.

Ví dụ tiếp theo cũng yêu cầu tính tổng nhưng các giá trị tổ hợp không liên tiếp, nó xuất hiện theo quy luật chẵn, lẻ của từng biểu thức.

Ví dụ 2.2 (Đề tuyển sinh ĐH Y dược TPHCM 2000)**.** Cho $n \in \mathbb{N}^*$ và các biểu thức:

$$C = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \cdots + C_{2n}^{2n-2} + C_{2n}^{2n},$$
$$D = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + \cdots + C_{2n}^{2n-3} + C_{2n}^{2n-1}.$$

a) Chứng minh $C = D$,
b) Rút gọn C.
Giải.
a) Để chứng minh $C = D$ các biểu thức này có tổng các chỉ số tổ hợp chẵn bằng tổng chỉ số tổ hợp chập lẻ, tức là nó ở hai vế của một đẳng thức. Để ý đến kết quả của lũy thừa $(-1)^k$ bằng 1 nếu k chẵn và bằng -1 nếu k lẻ, ta tìm đến lời giải dưới đây.
Khai triển

$$(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \cdots + C_{2n}^{2n} x^{2n}. \quad (4)$$

Thay $x = -1$ vào đẳng thức (4) ta nhận được:

$$(1-1)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \cdots + (-1)^k C_{2n}^k + \cdots + C_{2n}^{2n} x^{2n}$$

hay

$$0 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \cdots + (-1)^k C_{2n}^k + \cdots + C_{2n}^{2n} x^{2n}$$

chuyển sang vế trái các số hạng có số tổ hợp chập k lẻ ta được

$$C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + \cdots + C_{2n}^{2n-3} + C_{2n}^{2n-1} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \cdots + C_{2n}^{2n-2} + C_{2n}^{2n}$$

$$\Leftrightarrow D = C.$$

b) Khi rút gọn biểu thức C ta lại thấy hình thức như biểu thức A trong Ví dụ 2.1, do đó thực hiện thay $x = 1$ vào đẳng thức (4) ta nhận được:

$$(1+1)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{2n}^{2n}$$
$$\Leftrightarrow 2^{2n} = C + D$$
$$\Leftrightarrow C = 2^{2n-1}.$$

Cũng xuất hiện theo dạng chẵn, lẻ của các tổ hợp nhưng trong mỗi biểu thức thì có dấu đan nhau, việc khai triển cần được chọn thích hợp để có thể xuất hiện biểu thức cần rút gọn.

Ví dụ 2.3. Rút gọn biểu thức:

$$E = C_{2022}^0 - C_{2022}^2 + C_{2022}^4 - C_{2022}^6 + \cdots + C_{2022}^{2020} - C_{2022}^{2022},$$
$$F = C_{2022}^1 - C_{2022}^3 + C_{2022}^5 - C_{2022}^7 \cdots + -C_{2022}^{2019} + C_{2022}^{2021}.$$

Giải.
Ở bài toán này lại không dùng cách khai triển như ở Ví dụ 2.2 được, theo quy luật các biểu thức E và F thì dấu trong từng số hạng đan xen, tổng của các tổ hợp chẵn và lẻ tách rời nhau. Ta phải tìm một số mà khi lũy thừa bậc chẵn hoặc lẻ thì được kết quả dấu đan xen, từ những kiến thức đã biết về số phức, với đơn vị ảo i thì $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$, $k \in \mathbb{N}$. Thực hiện khai triển nhị thức Niu-tơn

$$(1+i)^{2022} = C_{2022}^0 + C_{2022}^1 i + C_{2022}^2 i^2 + \cdots + C_{2022}^{2022} i^{2021}. \quad (5)$$

Khi đó phần thực của biểu thức vế phải (5) là:

$$C_{2022}^0 - C_{2022}^2 + C_{2022}^4 - C_{2022}^6 + \cdots + C_{2022}^{2020} - C_{2022}^{2022}.$$

Phần ảo của biểu thức vế phải (5) là:

$$C_{2022}^1 - C_{2022}^3 + C_{2022}^5 - C_{2022}^7 + \cdots - C_{2022}^{2019} + C_{2022}^{2021}.$$

Mặt khác

$$(1+i)^{2022} = \left[(1+i)^2\right]^{1011} = (2i)^{1011} = 2^{1011}\,(i^2)^{505}\, i = -2^{1011} i.$$

Phần thực của $(1+i)^{2022}$ bằng 0, phần ảo của $(1+i)^{2022}$ bằng -2^{1011}.
Do đó

$$E = C_{2022}^0 - C_{2022}^2 + C_{2022}^4 - C_{2022}^6 + \cdots + C_{2022}^{2020} - C_{2022}^{2022} = 0,$$
$$F = C_{2022}^1 - C_{2022}^3 + C_{2022}^5 - C_{2022}^7 + \cdots - C_{2022}^{2019} + C_{2022}^{2021} = -2^{1011}.$$

Ở ví dụ dưới đây, trước mỗi tổ hợp còn được nhân thêm một hệ số, dựa vào các cách tính đạo hàm, tích phân ta tìm được mối quan hệ của biểu thức cần rút gọn với biểu thức khai triển.

Ví dụ 2.4. Rút gọn biểu thức

$$G = 1\, C_{2021}^1 + 2\, C_{2021}^2 + 3\, C_{2021}^3 + \cdots + 2020\, C_{2021}^{2020} + 2021\, C_{2021}^{2021},$$
$$H = C_{2021}^0 + \frac{1}{2} C_{2021}^1 + \frac{1}{3} C_{2021}^2 + \frac{1}{4} C_{2021}^3 + \cdots + \frac{1}{2021} C_{2022}^{2020} + \frac{1}{2022} C_{2021}^{2021}.$$

Giải.
Các biểu thức G và H, trước mỗi tổ hợp có nhân thêm một hệ số, không phải là lũy thừa tăng như trong dạng khai triển (2) mà xuất hiện dưới dạng nhân thêm giá trị của số mũ hoặc mẫu là giá trị của số mũ cộng thêm 1, với kết quả đã biết của đạo hàm $(x^n)' = nx^{n-1}$ và nguyên hàm $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$, từ đó ta có thể tính đạo hàm và tích phân của biểu thức khai triển để được kết quả là các biểu thức G, H. Khai triển nhị thức

$$(1+x)^{2021} = C_{2021}^0 + C_{2021}^1 x + C_{2021}^2 x^2 + \cdots + C_{2021}^{2021} x^{2021}. \quad (6)$$

Đạo hàm hai vế của (6) ta được

$$2021(1+x)^{2021} = C_{2021}^1 + 2C_{2021}^2 x + \cdots + 2021 C_{2021}^{2021}\, x^{2020}. \quad (7)$$

Thay $x = 1$ vào (7) ta có

$$2021(1+1)^{2021} = C_{2021}^1 + 2C_{2021}^2 + \cdots + 2021 C_{2021}^{2021}, \quad (8)$$

từ đây ta có được $G = 2021\, 2^{2021}$.

Để ý đến việc tính tích phân xác định

$$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Big|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

Từ đây ta phải chọn a, b thích hợp sao cho $\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$, dễ dàng tìm được $a = 0, b = 1$. Lấy tích phân hai vế (6) cận từ 0 đến 1.

$$\int_0^1 (1+x)^{2021}\, dx = \int_0^1 (C_{2021}^0 + C_{2021}^1\, x + C_{2021}^2\, x^2 + \cdots + C_{2021}^{2021}\, x^{2021}) dx. \quad (9)$$

Biến đổi biểu thức vế trái của (9) ta có

$$\int_0^1 (1+x)^{2021}dx = \frac{1}{2022}\,(1+x)^{2022}\Big|_0^1 = \frac{1}{2022}\left(2^{2022}-1\right).$$

Vế phải của (9) là

$$\begin{aligned}&\int_0^1 (C_{2021}^0 + C_{2021}^1\, x + C_{2021}^2\, x^2 \\ &\qquad + \cdots + C_{2021}^{2021}\, x^{2021})dx \\ &= (C_{2021}^0\, x + \frac{1}{2}C_{2021}^1\, x^2 + \frac{1}{3}C_{2021}^2\, x^3 \\ &+ \cdots + \frac{1}{2022}C_{2021}^{2021}\, x^{2022})\Big|_0^1 \\ &= C_{2021}^0 + \frac{1}{2}C_{2021}^1 + \frac{1}{3}C_{2021}^2 \\ &\qquad + \cdots + \frac{1}{2022}C_{2021}^{2021}.\end{aligned}$$

Do đó $H = \frac{1}{2022}\left(2^{2022}-1\right)$.

Một ứng dụng khác của khai triển nhị thức Niu-tơn là tính hệ số trong khai triển, dựa vào công thức khai triển dạng (1) để biết được số hạng tổng quát của khai triển, từ đó tìm được lời giải theo yêu cầu của bài toán tương ứng.

2.2 Ứng dụng nhị thức Niu-tơn để tính hệ số trong khai triển biểu thức

Ví dụ đầu tiên của mục này yêu cầu tính giá trị một hệ số cụ thể dựa vào khai triển nhị thức Niu-tơn và tính tổng các hệ số bằng cách thay giá trị vào biểu thức khai triển.

Ví dụ 2.5. Cho đa thức: $P(x) = (16x-15)^{2021}$. Khai triển đa thức đó dưới dạng:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2021}x^{2021}. \quad (10)$$

a) Tính tổng

$$S = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2021}.$$

b) Tính hệ số a_2.

Giải.

a) Thay $x=1$ vào (10) ta được

$$P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2021} \Leftrightarrow 1 = S.$$

Vậy $S = 1$.

b)

$$\begin{aligned}P(x) &= (16x-15)^{2021} \\ &= \sum_{k=0}^{2021} C_{2021}^k (16x)^{2021-k}(-15)^k.\end{aligned}$$

Ứng với hệ số a_2 thì

$$2021 - k = 2 \Leftrightarrow k = 2019$$

do đó $a_2 = C_{2021}^{2019}\, 16^2\,(-15)^{2019} = -16^2\,15^{2019}\,C_{2021}^{2019}$.

Cũng là một bài toán tìm hệ số của khai triển, ở đây là hệ số của một số hạng đặc biệt, nó không còn gắn với biến x.

Ví dụ 2.6 (Đề tuyển sinh ĐHSP Hà Nội khối A 2000)**.** Trong khai triển nhị thức $\left(x\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{28}{15}}\right)^{24}$, $x > 0$ hãy tìm số hạng không phụ thuộc vào x.

Giải.

Các biểu thức khi khai triển đều có dạng một hệ số nhân với lũy thừa của x, theo yêu cầu của bài toán, số hạng cần tìm không phụ thuộc vào x, với kết quả quen thuộc $x^0 = 1$ (với $x \neq 0$) không phụ thuộc vào x, do vậy ta chỉ cần tìm số mũ của x trong khai triển và cho giá trị của số mũ đó bằng 0.

$$\begin{aligned}&\left(x\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{28}{15}}\right)^{24} \\ &= \sum_{k=0}^{24} C_{24}^k \left(x\sqrt[3]{x}\right)^{24-k}\left(x^{-\frac{28}{15}}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{24} C_{24}^k\, x^{\frac{4}{3}(24-k)-\frac{28}{15}k}.\end{aligned}$$

Giá trị k ứng với số hạng không chứa x thỏa mãn

$$\frac{4}{3}(24-k) - \frac{28}{15}k = 0 \Leftrightarrow k = 10.$$

Vậy số hạng không chứa x là $C_{24}^{10} = 1\,961\,256$.

Việc khai triển nhị thức Niu-tơn khi xuất hiện nhiều hệ số, mà yêu cầu tìm hệ số có giá trị lớn nhất. Khi đó ta so sánh các hệ số theo tính đơn điệu tăng hoặc giảm để tìm hệ số lớn nhất.

Ví dụ 2.7. Cho khai triển

$$\begin{aligned}(1+3x)^{20} =& a_0 + a_1x + a_2x^2 \\ &+ \cdots + a_{20}x^{20}.\end{aligned}$$

Tìm $\max\{a_0, a_1, \cdots, a_{20}\}$.

Giải.

Nếu khai triển biểu thức trên thì có 21 giá trị hệ số, việc tìm tất cả các giá trị đó và so sánh với nhau là điều không nghĩ đến khi tiếp cận lời giải cho bài toán này. Một kết quả của khai triển nhị thức Niu-tơn là các hệ số được viết dưới dạng tam giác Pa-xcan, ở đó ta thấy được quy luật là các hệ số đối xứng nhau, tăng đến số chính giữa của dãy hệ số rồi giảm, với ý tưởng này ta cũng đánh giá theo quy luật tăng và giảm đó, tuy nhiên kết quả giá trị lớn nhất không phải là số chính giữa của dãy vì ở đây khai triển hệ số của x là 3 chứ không phải 1.

$(1+3x)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k (3x)^k$. Do đó giá trị $a_k = C_{20}^k\, 3^k,\ k = 0, \cdots, 20$.
Thực hiện đánh giá

$$\begin{aligned} a_k &\le a_{k+1} \\ \Leftrightarrow C_{20}^k\, 3^k &\le C_{20}^{k+1}\, 3^{k+1} \\ \Leftrightarrow \frac{20!}{k!\,(20-k)!} &\le \frac{20!\;3}{(k+1)!\,(19-k)!} \\ \Leftrightarrow k+1 &\le 3\,(20-k) \\ \Leftrightarrow k &\le \frac{59}{4} = 14,75. \end{aligned}$$

Như vậy $a_k \le a_{k+1} \Leftrightarrow k \le 14$ nên ta sắp xếp các giá trị a_k như sau

$$a_0 < a_1 < \cdots < a_{14} < a_{15}$$

và

$$a_{20} < a_{19} < \cdots < a_{16} < a_{15}.$$

Vậy $\max\{a_0, a_1, \cdots, a_{20}\} = a_{15} = C_{20}^{15}\, 3^{15} =$ 222 465 454 128.

Việc tìm số dư của một phép chia thường sử dụng những số rất lớn, người ta thường dùng đến phương pháp đồng dư, một phương pháp khác là sử dụng khai triển nhị thức Niu-tơn với các hệ số tích hợp.

2.3 Ứng dụng khai triển nhị thức Niu-tơn để tìm số dư của phép chia

Chúng tôi đưa ra các ví dụ về tìm số dư khi chia cho 5 hoặc lũy thừa của 5 (5^3), ý tưởng là đưa về khai triển nhị thức Niu-tơn có hệ số là bội của 5. Khi tìm số dư của phép chia cho một số khác thì có thể biến đổi một cách tương tự theo ý tưởng này.

Ví dụ 2.8. Tìm số dư của phép chia 2^{2020} cho 5.
Giải.
$2^{2020} = \left(2^2\right)^{1010} = (1-5)^{1010} = \sum_{k=0}^{1010} C_{1010}^k (-5)^k = C_{1010}^0 + \sum_{k=1}^{1010} C_{1010}^k (-5)^k$.

Vì $\sum_{k=1}^{1010} C_{1010}^k (-5)^k \vdots 5$ nên số dư của phép chia 2^{2020} cho 5 bằng số dư của phép chia $C_{1010}^0 = 1$ cho 5 và bằng 1.

Ví dụ 2.9. Tìm số dư của phép chia 11^{2020} cho 125.

$$\begin{aligned} 11^{2020} = (1+10)^{2020} &= \sum_{k=0}^{2020} C_{2020}^k 10^k \\ &= C_{2020}^0 + C_{2020}^1 10 + C_{2020}^2 10^2 \\ &\quad + \sum_{k=3}^{2020} C_{2020}^k 10^k. \end{aligned}$$

Ta nhận thấy $125 = 5^3$ do đó $\sum_{k=3}^{2020} C_{2020}^k\, 10^k = \sum_{k=3}^{2020} C_{2020}^k 2^k\, 5^k \vdots 5^3$ và $C_{2020}^2\, 10^2 \vdots 5^3$ nên số dư của phép chia 11^{2020} cho 125 bằng số dư của $C_{2020}^0 + C_{2020}^1\, 10$ cho 125 và bằng 76.

2.4 Một số bài tập đề nghị

Bài 2.4.1. Rút gọn biểu thức
a) $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \cdots + 2^n C_n^n, n \in \mathbb{N}^*$;
b) $2^n C_n^0 + 2^{n-1} C_n^1 + 2^{n-2} C_n^2 + \cdots + C_n^n, n \in \mathbb{N}^*$;
Đáp số: a) 3^n; b) 3^n.

Bài 2.4.2. Rút gọn biểu thức
a) $C_{2021}^1 + 2C_{2021}^2 + 3C_{2021}^3 + \cdots + 2021 C_{2021}^{2021}, n \in \mathbb{N}^*$;
b) $C_{2021}^1 + 2C_{2021}^2 2 + 3C_{2021}^3 2^2 + \cdots + 2021 C_{2021}^{2021} 2^{2020}, n \in \mathbb{N}^*$.
Đáp số: a) 2021.2^{2021}; b) 2021.3^{2021}.

Bài 2.4.3. Rút gọn biểu thức
$C_{2021}^0\, 2 + \frac{1}{2} C_{2021}^1\, 2^2 + \frac{1}{3} C_{2021}^2\, 2^3 + \frac{1}{4} C_{2021}^3\, 2^4 + \cdots + \frac{1}{2022} C_{2021}^{2021}\, 2^{2022}, n \in \mathbb{N}^*$.
Đáp số: $\frac{3^{2022}-1}{2022}$.

Bài 2.4.4 (Đề tuyển sinh Học viện Cảnh sát nhân dân khối A năm 2000). Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} C_n^0 - \frac{1}{4} C_n^1 + \frac{1}{6} C_n^2 - \frac{1}{8} C_n^3 + \cdots \\ &+ \frac{(-1)^n}{2(n+1)} C_n^n = \frac{1}{2(n+1)}, n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Bài 2.4.5 (Đề tuyển sinh đại học khối A năm 2003). Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$, biết rằng: $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$ (n nguyên dương, $x > 0$).
Đáp số: 495.

Bài 2.4.6 (Đề tuyển sinh đại học khối A năm 2003)**.** Gọi $a_1, a_2, \cdots, a_{11}$ là các hệ số trong khai triển sau:

$$(x+1)^{10}(x+2) = x^{11} + a_1x^{10} + a_2x^9 + \cdots + a_{11}.$$

Hãy tính hệ số a_5.

Đáp số: $a_5 = 672$.

Bài 2.4.7 (Đề tuyển sinh ĐHSP Hà Nội khối A 2001)**.** Trong khai triển của biểu thức $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10}$ thành đa thức $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_9x^9 + a_{10}x^{10}$, $(a_k \in \mathbb{R})$ hãy tìm hệ số a_k lớn nhất $(0 \le k \le 10)$.

Đáp số $a_7 = \dfrac{5120}{19683}$.

Bài 2.4.8 (Đề tuyển sinh đại học khối A năm 2004)**.** Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của $[1 + x^2(1-x)]^8$.

Đáp số: 238.

Bài 2.4.9. Tìm số dư trong các phép chia

a) 5^{2021} khi chia cho 3.

b) 4^{2021} khi chia cho 27.

Đáp số: a) 2; b) 25.

Bài 2.4.10. Tìm số dư trong các phép chia

a) 3^{2021} khi chia cho 7.

b) 4^{2021} khi chia cho 49.

Đáp số: a) 5; b) 44.

3 KẾT LUẬN

Nhị thức Niu-tơn là một công cụ quan trọng và có nhiều ứng dụng, đặc biệt là khi học lên các chương trình cao hơn. Việc áp dụng nó một cách thành thạo và linh hoạt là mong muốn của người học. Bài báo đã hệ thống lại những dạng bài tập thường gặp về nhị thức Niu-tơn trong chương trình phổ thông. Những ứng dụng cao hơn của nhị thức Niu-tơn chưa được chúng tôi đề cập. Cụ thể, chúng tôi đã đưa ra được các dạng bài tập cũng như ý tưởng để rút gọn một biểu thức bằng các phương pháp khác nhau như dùng khai triển nhị thức Niu-tơn, kết hợp khai triển nhị thức Niu-tơn với dùng đạo hàm và tích phân xác định. Thêm vào đó chúng tôi đã đưa được một phương pháp tìm số dư của phép chia mà không dùng đến phương pháp đồng dư thức.

REFERENCES

[1] Quynh, D. (2007). *Textbook of Algebra and Analysis 11 (Advanced),* Education Publishing House, Vietnam.

[2] Duc, L.H., Ngọc, L.B., Tri, L.H. (2003). *Method of solving combination problems,* Hanoi Publishing House, Vietnam.

[3] Chinh, P.D., Thuy, V.D., Man. T., Tam, D., Nhat, L.T. (1996). *Maths exam preparation lessons – volume 3,* Education Publishing House, Vietnam.

[4] Doan, N.H. (2001). *Solve math and review analysis,* Education Publishing House, Vietnam.

[5] Toufik, M., Matthias, S. (2011). *The commutation relation $xy = qyx + hf(y)$ and Newton's binomial formula,* The Ramanujan Journal, Volume 25, issue 3.