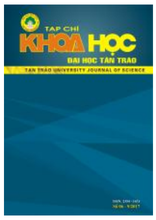
No.21_June 2021 |p.52-62

TẠP CHÍ KHOA HỌC ĐẠI HỌC TÂN TRÀO
ISSN: 2354 - 1431
http://tckh.daihoctantrao.edu.vn/



THE SOLVABILITY AND UNIQUENESS OF MILD SOLUTION OF IMPULSIVE NEUTRAL STOCHASTIC INTEGRODIFFERENTIAL EQUATIONS DRIVEN BY A FRACTIONAL BROWNIAN MOTION.

Nguyen Nhu Quan[1,*]

[1]*Electric Power University, Vietnam*

[*]*Email address: quan2n@epu.edu.vn*

https://doi.org/10.51453/2354-1431/2021/552

Article info

Recieved:
16/3/2021
Accepted:
3/5/2021

Keywords:
Mild Solution; Stochastic Differential Equations; Fractional Brownian motion; Solvability and Uniqueness.

Abstract:

In this work, the author studies the solvability and uniqueness of mild solution of impulsive neutral stochastic integrodifferential equations driven by a fractional Brownian motion.

No.21_June 2021 |p.52-62

TẠP CHÍ KHOA HỌC ĐẠI HỌC TÂN TRÀO
ISSN: 2354 - 1431
http://tckh.daihoctantrao.edu.vn/

TÍNH GIẢI ĐƯỢC VÀ DUY NHẤT CỦA NGHIỆM TÍCH PHÂN ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH VI TÍCH PHÂN NGẪU NHIÊN TRUNG TÍNH CÓ XUNG VÀ CHUYỂN ĐỘNG BROWN BẬC PHÂN SỐ.

Nguyễn Như Quân[1,*]

[1]*Đại học Điện lực, Việt Nam*

[*]*Địa chỉ email: quan2n@epu.edu.vn*

https://doi.org/10.51453/2354-1431/2021/552

Thông tin bài viết

Ngày nhận bài:
16/3/2021
Ngày duyệt đăng:
3/5/2021

Từ khóa:
Nghiệm tích phân, Phương trình vi phân ngẫu nhiên, Chuyển động Brown bậc phân số, Tính giải được và duy nhất.

Tóm tắt

Trong bài báo này, tác giả chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm tích phân của phương trình vi tích phân ngẫu nhiên trung tính có xung và chuyển động Brown bậc phân số.

1. Mở đầu

Trong bài báo này ta nghiên cứu lớp phương trình vi tích phân có xung sau:

$$d[x(t)-g(t,x_t,\int_0^t a_1(t,s,x_s)ds]=[Ax(t)+f(t,x_t,\int_0^t a_2(t,s,x_s)ds)]dt \\ +F(t)dB_Q^H(t), t\in[0,b], t\neq t_i, \tag{1}$$

$$\Delta x(t_i)=I_i(x(t_i^-)),\ t=t_i,\ i=1,2,..., \tag{2}$$

$$x_0(t)=\phi(t)\in PC([-r,0],X), -r\le t\le 0, \tag{3}$$

trong đó A là toán tử sinh của nửa nhóm giải tích $(T(t))_{t\geq 0}$ các toán tử bị chặn trong không gian Hilbert X, B_Q^H là chuyển động Brown bậc phân số, $g, f:[0,+\infty)\times PC\times X\to X$, $a_1,a_2:[0,+\infty)\times[0,+\infty)\times PC\to X$,

$F:[0,+\infty)\to L_Q^0(Y,X)$ là hàm thích hợp sẽ được định nghĩa sau. Các thời điểm xung t_i thỏa mãn $0<t_1<t_2<...<t_i<...$, và $\lim_{i\to\infty} t_i=\infty$. $I_i: X\to X$, $\Delta x(t_i)$ là độ lớn bước nhảy của hàm trạng thái x tại thời điểm t_i, được định nghĩa bởi $\Delta x(t_i)=x(t_i^+)-x(t_i^-)$, với $x(t_i^+)$ và $x(t_i^-)$ tương ứng là giới hạn phải và giới hạn trái của $x(t_i)$ tại t_i. $\mathrm{PC}=\{\phi:[-r,0]\to X, \phi(t)$ liên tục hầu khắp nơi trừ một số hữu hạn các điểm $\bar{t}$ tại đó $\phi(\bar{t}^+)$, $\phi(\bar{t}^-)$ tồn tại và $\phi(\bar{t}^+)=\phi(\bar{t}^-)\}$. Khi đó cho một hàm $\phi\in\mathrm{PC}$, ta thấy rằng $\|\phi\|_{\mathrm{PC}}=\sup_{s\in[-r,0]}\|\phi(s)\|<+\infty$. Với mọi hàm liên tục x và mọi $t\in[0,b]$, kí hiệu x_t là một phần tử của PC được định nghĩa bởi $x_t(\theta)=x(t+\theta), -r\le\theta\le 0.$

Gần đây, các tác giả trong [2] đã nghiên cứu sự tồn tại nghiệm tích phân của phương trình vi phân ngẫu nhiên trung tính với chuyển động Brown bậc phân số và hiệu ứng xung. Phương trình vi tích phân Volterra ngẫu nhiên với chuyển động Brown bậc phân số trong không gian Hilbert đã được nghiên cứu trong [3]. Tuy nhiên, cho tới thời điểm hiện tại, vấn đề nghiên cứu tính giải được đối với hệ phương trình vi tích phân ngẫu nhiên trung tính với hiệu ứng xung và chuyển động Brown bậc phân số vẫn là bài toán chưa có lời giải. Do đó, trong bài báo này ta đặt vấn đề nghiên cứu tính giải được đối với hệ phương trình vi tích phân ngẫu nhiên trung tính với hiệu ứng xung và chuyển động Brown bậc phân số (1) - (3) ở trên.

Nội dung bài báo này được trình bày như sau: Trong phần tiếp theo mục 2.1, tác giả đề cập đến một số khái niệm và kết quả cần thiết cho việc chứng minh các kết quả nghiên cứu của mình. Mục 2.2, ta trình bày kết quả chính của bài báo đó là chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm tích phân của bài toán (1) – (3), Định lí 2.2.2. Cuối cùng là phần kết luận một số kết quả đã đạt được của bài báo.

2. Nội dung

2.1. Kiến thức chuẩn bị

Ta trình bày một số khái niệm cơ bản liên quan đến chuyển động Brown bậc phân số (fBm) và tích phân Wiener tương ứng với fBm. Ta cũng nhắc lại một số kết quả cơ sở về nửa nhóm giải tích làm nền tảng cho nghiên cứu của chúng tôi.

Cho X và Y là hai không gian Hilbert thực tách được và $L(X,Y)$ là không gian các toán tử tuyến tính bị chặn từ Y đến X. Để thuận tiện, ta sử dụng chung kí hiệu $\|\cdot\|$ là chuẩn trong các không gian X, Y và $L(X,Y)$. Giả sử $(\Omega,\mathrm{F},\mathrm{P})$ là không gian xác suất đầy đủ. Kí hiệu $\mathrm{E}(\cdot)$ là toán tử kì vọng toán tương ứng với xác suất P. Toán tử không âm, tự liên hợp được kí hiệu là $Q\in L(Y,Y)$. L_Q^0 là không gian các hàm $\gamma\in L(Y,X)$ sao cho $\gamma Q^{\frac{1}{2}}$ là toán tử Hilbert-Schmidt với chuẩn được định nghĩa bởi $|\gamma|^2_{L_Q^0(Y,X)}=|\gamma Q^{\frac{1}{2}}|^2_{HS}=tr(\gamma Q\gamma^*)$ (kí hiệu $tr(A)$ là vết của toán tử A). Khi đó, γ được gọi là toán tử Q-Hilbert-Schmidt từ Y vào X.

Định nghĩa 2.1.1. Hai mặt của một fBm một chiều với tham số Hurst $H\in(0,1)$ là một quá trình trung tâm Gauss liên tục $\beta^H=\{\beta^H(t), t\in\mathbb{R}\}$ với hàm hiệp phương sai

$$R_{H(t,s)}=\mathrm{E}[\beta^H(t)\beta^H(s)]=\frac{1}{2}(|t|^{2H}+|s|^{2H}-|t-s|^{2H}), t,s\in\mathbb{R}.$$

Bây giờ, ta ước lượng tích phân Wiener tương ứng với fBm một chiều β^H. Cố định số thực $b>0$. Kí hiệu Φ là không gian tuyến tính của các hàm bước (step function) với giá trị thực xác định trên $[0,b]\subset\mathbb{R}$, nghĩa là, $\varphi\in\Phi$ nếu

$$\varphi(t)=\sum_{i=1}^{n-1}x_i\nu_{[t_i,t_{i+1}]}(t), t\in[0,b],$$

với $0 = t_1 < t_2 < ... < t_n = b$ và $x_i \in \mathbb{R}$. Định nghĩa tích phân Wiener của hàm $\varphi \in \Phi$ tương ứng với β^H bởi

$$\int_0^b \varphi(s) d\beta^H(s) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i (\beta^H(t_{i+1}) - \beta^H(t_i)).$$

Bây giờ ta kí hiệu không gian Hilbert H là bao đóng của Φ tương ứng với tích vô hướng

$$< \nu_{[0,t]}, \nu_{[0,s]} >_{\mathrm{H}} = R_H(t,s).$$

Khi đó, ta có

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \nu_{[t_i, t_{i+1})} \mapsto \int_0^b \varphi(s) d\beta^H(s).$$

Ánh xạ trên là một đẳng cự giữa các không gian Φ và không gian tuyến tính $span\{\beta^H, t \in [0,b]\}$, nó có thể mở rộng thành một đẳng cự giữa H với sự hỗn loạn Wiener đầu tiên của fBm $\overline{span}^{L^2(\Omega)}\{\beta^H, t \in [0,b]\}$ (xem [7]). Tích phân Wiener của φ ứng với β^H là ảnh của một phần tử $\varphi \in \mathrm{H}$ bởi đẳng cự này. Bây giờ chúng tôi đưa ra một mở rộng của tích phân này. Xét hạt nhân

$$K_H(t,s) = c_H s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t (\tau - s)^{H-\frac{3}{2}} \tau^{H-\frac{1}{2}} d\tau, t > s,$$

với $c_H = \sqrt{\dfrac{H(2H-1)}{\mathrm{B}(2-2H, H-\frac{1}{2})}}$ và B là hàm Beta. Dễ thấy rằng

$$\frac{\partial K_H(t,s)}{\partial t} = c_H \left(\frac{t}{s}\right)^{H-\frac{1}{2}} (t-s)^{H-\frac{3}{2}}.$$

Xét toán tử tuyến tính $K_H^* : \Phi \to L^2([0,b])$, cho bởi

$$(K_H^* \varphi)(s) = \int_s^t \varphi(s) \frac{\partial K_H(t,s)}{\partial t} dt.$$

Ta có

$$(K_H^* \nu_{[0,t]})(s) = K_H(t,s)^* \nu_{[0,t]}(s).$$

K_H^* là một đẳng cự giữa Φ và $L^2([0,b])$ và có thể mở rộng đến không gian H. Xét $\mathrm{W} = \{\mathrm{W}(t), t \in [0,b]\}$, định nghĩa bởi $\mathrm{W}(t) = \beta^H((K_H^*)^{-1} \nu_{[0,t]})$. Ta thấy rằng W là một quá trình Wiener và β^H có biểu diễn tích phân Wiener sau:

$$\beta^H(t) = \int_0^t K_H(t,s) d\mathrm{W}(s).$$

Và

$$\int_0^b \varphi(s) d\beta^H(s) = \int_0^b (K_H^* \varphi)(t) d\mathrm{W}(t),$$

với mọi $\varphi \in \mathrm{H}$ nếu và chỉ nếu $K_H^* \varphi \in L^2([0,b])$. Hơn nữa, kí hiệu $L^2_{\mathrm{H}}([0,b]) = \{\varphi \in \mathrm{H}, K_H^* \varphi \in L^2([0,b])\}$. Khi $H > \frac{1}{2}$, ta có $L^{1/H}([0,b]) \subset L^2_{\mathrm{H}}([0,b])$, xem [6].

Để chứng minh sự tồn tại nghiệm tích phân của bài toán đặt ra, ta cần sử dụng bất đẳng thức sau

Bổ đề 2.1.2.([5]) Với $\varphi \in L^{1/H}([0,b])$,

$$H(2H-1) \int_0^b \int_0^b |\varphi(v)| |\varphi(\tau)| |v - \tau|^{2H-2} dv d\tau \le c_H \| \varphi \|^2_{L^{1/H}([0,b])}.$$

Giả sử dãy hai mặt của một fBm một chiều $\{\beta_n^H(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ độc lập trên $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ và xét chuỗi sau

$$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^H(t)u_n, t\ge 0.$$

Ở đây $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là cơ sở trực chuẩn đầy đủ trong Y. Chuỗi trên không nhất thiết hội tụ trong không gian Y. Xét quá trình ngẫu nhiên nhận giá trị trong Y, $B_Q^H(t)$ xác định bởi

$$B_Q^H(t)=\sum_{n-1}^{\infty}\beta_n^H(t)Q^{1/2}u_n, t\ge 0.$$

Chuỗi này hội tụ trong Y nếu Q thuộc lớp các toán tử vết không âm tự liên hợp. Rõ ràng, ta có $B_Q^H\in L^2(\Omega,Y)$. Tại thời điểm đó, $B_Q^H(t)$ là Q - hình trụ fBm nhận giá trị trong Y với toán tử hiệp phương sai Q. Chẳng hạn, nếu $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy số thực không âm bị chặn sao cho $Qu_n=\lambda_n u_n$, giả sử rằng Q là toán tử hạch trong Y (cụ thể $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n<\infty$), khi đó quá trình ngẫu nhiên

$$B_Q^H(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^H(t)Q^{\frac{1}{2}}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n)^{\frac{1}{2}}\beta_n^H(t)u_n, t\ge 0,$$

được định nghĩa như một Q - hình trụ fBm nhận giá trị trong Y.

Cho $\varphi:[0,b]\to L_Q^0(Y,X)$ sao cho

$$\sum_{n=1}^{\infty}\| K_H^*(\varphi Q^{\frac{1}{2}}u_n)\|_{L^2([0,b];X)}<\infty. \qquad (4)$$

Định nghĩa 2.1.3. Cho $\varphi(s), s\in[0,b]$ là hàm số nhận giá trị trong $L_Q^0(Y,X)$. Khi đó, tích phân Wiener của φ tương ứng với B_Q^H được định nghĩa bởi

$$\int_0^t\varphi(s)dB_Q^H(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\varphi(s)Q^{\frac{1}{2}}u_n d\beta_n^H=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t(K_H^*((K_H^*(\varphi Q^{\frac{1}{2}}u_n))(s)dW(s), t\ge 0.$$

Lưu ý rằng nếu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|\varphi Q^{\frac{1}{2}}u_n\|_{L^{1/H}([0,b];X)}<\infty, \qquad (5)$$

thì (4) được thỏa mãn, điều này suy ra từ $L^{1/H}([0,b])\subset L_{\mathrm{H}}^2([0,b])$.

Bổ đề sau là mệnh đề quan trọng để chứng minh kết quả của chúng tôi, nó có thể xem như một ứng dụng đơn giản của Bổ đề 2.1.2. Chứng minh của bổ đề này đã được nêu trong [1].

Bổ đề 2.1.4. Với mỗi $\varphi:[0,b]\to L_Q^0(Y,X)$ sao cho (5) thỏa mãn, và với mọi $\alpha,\beta\in[0,b]$ với $\alpha>\beta$,

$$\mathrm{E}\left|\int_\beta^\alpha\varphi(s)dB_Q^H(s)\right|_X^2\le cH(2H-1)(\alpha-\beta)^{2H-1}\sum_{n=1}^{\infty}\int_\beta^\alpha|\varphi(s)Q^{\frac{1}{2}}u_n|_X^2\, ds,$$

ở đây $c=c(H)$. Nếu, thêm nữa, $\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(t)Q^{\frac{1}{2}}u_n|_X$ hội tụ đều với $t\in[0,b]$, thì

$$\mathrm{E}\left|\int_\beta^\alpha\varphi(s)dB_Q^H(s)\right|_X^2\le cH(2H-1)(\alpha-\beta)^{2H-1}\int_\beta^\alpha|\varphi(s)|_{L_Q^0(Y,X)}\, ds.$$

Tiếp theo, cho $A: D(A) \to X$ ($D(A)$: miền xác định của toán tử A) là toán tử sinh của một nửa nhóm giải tích các toán tử tuyến tính bị chặn $(T(t))_{t\geq 0}$ trên X. Giả sử rằng tồn tại hằng số $M \geq 1$ và $\mu \in \mathbb{R}$ sao cho $\| T(t) \| \leq Me^{\mu t}$, với mọi $t \geq 0$. Chúng tôi cũng giả thiết rằng $(T(t))_{t\geq 0}$ bị chặn đều và là nửa nhóm giải tích sao cho $0 \in \delta(A)$. Ở đây $\delta(A)$ là tập giải của A. Khi đó, ta có thể định nghĩa $(-A)^{\alpha}$ với $0 < \alpha \leq 1$, như là một toán tử tuyến tính đóng với miền xác định $D(-A)^{\alpha}$ tương ứng với chuẩn $\| \cdot \|_{\alpha}$. Kí hiệu X_{α} ($0 < \alpha \leq 1$) là không gian $D(-A)^{\alpha}$ với chuẩn $\| \cdot \|_{\alpha}$, ta có bổ đề sau

Bổ đề 2.1.5. [4] Giả sử có các giả thiết trên

(1) Nếu $0 < \alpha \leq 1$, thì X_{α} là một không gian Banach.

(2) Nếu $0 < \beta \leq \alpha$, thì phép nhúng $X_{\alpha} \to X_{\beta}$ liên tục.

(3) Tồn tại hằng số $M_{\alpha} > 0$ sao cho với mọi $0 < \alpha \leq 1$, ta có

$$\| (-A)^{\alpha} T(t) \| \leq \frac{M_{\alpha}}{t^{\alpha}} e^{-\mu t}, t > 0, \mu > 0.$$

Bất đẳng thức tích phân sau cùng là chìa khóa để chứng minh tính ổn định mũ của nghiệm tích phân của hệ trung tính với xung, nó đã được chứng minh ở Bổ đề 3.1 trong [8].

2.2. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Trong mục này, ta sử dụng lí thuyết điểm bất động để chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm tích phân của hệ (1) - (3). Trước hết ta trình bày khái niệm nghiệm tích phân cho bài toán đang xét

Định nghĩa 2.2.1. Một X - quá trình ngẫu nhiên $x(t), t \in [-r, b]$ được gọi là nghiệm tích phân của bài toán Cauchy tổng quát (1) – (3) nếu

(1) $x(\cdot) \in \mathrm{PC}([-r,b], L^2(\Omega, X))$;

(2) Với $t \in [-r, 0], x(t) = \phi(t)$;

(3) Với $t \in [0,b], x(t)$ thỏa mãn phương trình tích phân sau

$$\begin{aligned} x(t) = {} & T(t)[\phi(0) - g(0,\phi,0)] + g(t, x_t, \int_0^t a_1(t,s,x_s)ds) + \int_0^t AT(t-s) g(s, x_s, \int_0^s a_1(s,\tau,x_\tau)d\tau)ds \\ & + \int_0^t T(t-s) f(s, x_s, \int_0^s a_2(s,\tau,x_\tau)d\tau)ds + \sum_{0<t_i<t} T(t-t_i) I_i(x(t_i^-)) \\ & + \int_0^t T(t-s) F(s) dB_Q^H(s) \quad \mathrm{P} - a.s. \end{aligned} \tag{6}$$

Để đạt được các kết quả trong phần này, chúng tôi đưa ra các giả thiết sau:

(H1) A là toán tử sinh của một nửa nhóm giải tích $(T(t))_{t\geq 0}$ các toán tử tuyến tính bị chặn trên X thỏa mãn $0 \in \delta(A)$. Do đó, từ Bổ đề 2.1.5, tồn tại các hằng số $M, M_{1-\beta}$ sao cho

$$\| T(t) \| \leq M \text{ và } \| (-A)^{1-\beta} T(t) \| \leq \frac{M_{1-\beta}}{t^{1-\beta}}, \text{ với mọi } t \in [0,b].$$

(H2) Ánh xạ $g: [0,+\infty) \times \mathrm{PC} \times X \to X$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz sau

(i) Hàm $a_1: [0,+\infty) \times [0,+\infty) \times \mathrm{PC} \to X$ thỏa mãn điều kiện. Tồn tại hằng số $k_1 > 0$, sao cho với $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{PC}$

$$\left\| \int_0^t [a_1(t,s,\psi_1) - a_1(t,s,\psi_2)]ds \right\| \leq k_1 \left\| \psi_1 - \psi_2 \right\|, t \in [0,b].$$

(ii) Tồn tại hằng số $\frac{1}{2}<\beta<1$ và $k_2>0$ sao cho với $\psi_j,\phi_j\in \mathrm{PC}$, $j=1,2$, sao cho hàm g nhận giá trị trong X_β và thỏa mãn với mọi $t\in[0,b]$

$$\|(-A)^\beta g(t,\psi_1,\phi_1)-(-A)^\beta g(t,\psi_2,\phi_2)\|\le k_2\left[\|\psi_1-\psi_2\|+\|\phi_1-\phi_2\|\right].$$

Ngoài ra, đặt

$\bar{k}_1=b\sup_{0\le s\le t\le b}\|a_1(t,s,0)\|,\bar{k}_2=\sup_{t\in[0,b]}\|(-A)^\beta g(t,0,0)\|$

và $\bar{k}=k_2(1+k_1)$.

(H3) Ánh xạ $f:[0,+\infty)\times \mathrm{PC}\times X\to X$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz.

(i) Với $t\in[0,b]$, hàm $a_2:[0,+\infty)\times[0,+\infty)\times\mathrm{PC}\to X$ thỏa mãn điều kiện sau. Tồn tại hằng số $l_1>0$, sao cho với $\psi_1,\psi_2\in\mathrm{PC}$, ta có

$$\left\|\int_0^t[a_2(t,s,\psi_1)-a_2(t,s,\psi_2)]ds\right\|\le l_1\left\|\psi_1-\psi_2\right\|.$$

(ii) Với $t\in[0,b]$, tồn tại hằng số $l_2>0$ sao cho với $\psi_j,\phi_j\in\mathrm{PC}$, $j=1,2$

$$\|f(t,\psi_1,\phi_1)-f(t,\psi_2,\phi_2)\|\le l_2\left[\|\psi_1-\psi_2\|+\|\phi_1-\phi_2\|\right].$$

Ngoài ra, $\bar{l}:=l_2(1+l_1)$, $\bar{l}_1=b\sup_{0\le s\le t\le b}\|a_2(t,s,0)\|,\bar{l}_2=\sup_{t\in[0,b]}\|f(t,0,0)\|$.

(H4) Hàm $(-A)^\beta g$ liên tục bậc hai. Với mọi $\psi_j,\phi_j\in\mathrm{PC}$, $j=1,2$,

$$\lim_{t\to s}\mathrm{E}\|(-A)^\beta g(t,\psi_1,\phi_1)-(-A)^\beta g(s,\psi_2,\phi_2)\|^2=0.$$

(H5) Hàm $F:[0,+\infty)\to L_Q^0(Y,X)$ thỏa mãn

$$\int_0^t\|F(s)\|_{L_Q^0}^2\,ds<\infty,\forall t\in[0,b].$$

Với cơ sở trực chuẩn đủ $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ trong Y, ta có

(C.1) $\sum_{n=1}^{\infty}\|FQ^{1/2}u_n\|_{L^2([0,b];X)}<\infty$.

(C.2) Với $t\in[0,b],\sum_{n=1}^{\infty}|F(t)Q^{1/2}u_n|_X$ hội tụ đều.

(H6) Hàm xung $I_i(i=1,2,...)$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz sau đây. Tồn tại các số không âm $d_i(i=1,2,...)$ sao cho

$\|I_i(\psi_1)-I_i(\psi_2)\|\le d_i\|\psi_1-\psi_2\|$ và

$\|I_i(0)\|=0$, với mọi $\psi_1,\psi_2\in\mathrm{PC}$ và

$$\sum_{i=1}^{+\infty}d_i<\infty.$$

Định lí sau đây chứng minh sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm của hệ (1)-(3) nhờ vào các giả thiết trên. Đây là kết quả chính của bài báo này

Định lí 2.2.2. Nếu các giả thiết (H1)-(H6) thỏa mãn với mọi $\phi\in\mathrm{PC},b>0$, thì hệ (1)-(3) có nghiệm tích phân duy nhất trên $[-r,b]$ với điều kiện

$$\frac{3M^2(\sum_{i=1}^{\infty}d_i)^2}{(1-k)^2}<1. \tag{7}$$

Ở đây $k=\|(-A)^{-\beta}\|\bar{k}$.

Chứng minh

Xét tập $\Lambda_b:=\mathrm{PC}([-r,b],L^2(\Omega,X))$, đây là một không gian Banach các hàm liên tục từ $[-r,b]$ vào $L^2(\Omega,X)$ với chuẩn

$\|\xi\|_{\Lambda_b}^2=\sup_{s\in[-r,b]}(\mathrm{E}\|\xi(s)\|^2)$ và $b>0$ cố định.

Bây giờ ta xét tập con đóng của Λ_b được kí hiệu bởi $\hat{\Lambda}_b=\{x\in\Lambda_b:x(\tau)=\phi(\tau),\tau\in[-r,0]$ với chuẩn $\|\cdot\|_{\Lambda_b}^2$. Ta chuyển bài toán (1)-(3) thành bài toán điểm bất động. Định nghĩa toán tử $\mathrm{L}:\hat{\Lambda}_b\to\hat{\Lambda}_b$ bởi

$$(\mathrm{L}x)(t)=T(t)[\phi(0)-g(0,\phi,0)]+g(t,x_t,\int_0^t a_1(t,s,x_s)ds)+\int_0^t AT(t-s)g(s,x_s,\int_0^s a_1(s,\tau,x_\tau)d\tau)ds$$
$$+\int_0^t T(t-s)f(s,x_s,\int_0^s a_2(s,\tau,x_\tau)d\tau)ds+\sum_{0<t_i<t}T(t-t_i)I_i(x(t_i^-)),\ t\in[0,b]$$
$$+\int_0^t T(t-s)F(s)dB_Q^H(s),$$

và $(\mathrm{L}x)(t)=\phi(t), t\in[-r,0].$ Để chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán (1)-(3) ta sẽ chứng minh toán tử L có điểm bất động và để chứng minh tính duy nhất ta sử dụng định lí điểm bất động Banach.

Trước tiên, chúng tôi chỉ ra rằng $t\mapsto(\mathrm{L}x)(t)$ là liên tục trên đoạn [0, b]. Thật vậy, lấy $x\in\hat{\Lambda}_b, 0<t<b$ và $0<\rho\in\mathbb{R}$ đủ nhỏ, ta có

$$\mathrm{E}\,\|(\mathrm{L}x)(t+\rho)-(\mathrm{L}x)(t)\|^2\le 6\mathrm{E}\,\|(T(t+\rho)-T(t))[\phi(0)-g(0,\phi,0)]\|^2$$
$$+6\sum_{j=1}^{5}\mathrm{E}\,\|F_j(t+\rho)-F_j(t)\|^2.$$

Bằng cách sử dụng tính chất nửa nhóm, ta có

$$\mathrm{E}\,\|(T(t+\rho)-T(t))[\phi(0)-g(0,\phi,0)]\|^2=\mathrm{E}\,\|(T(t)T(\rho)-T(t))[\phi(0)-g(0,\phi,0)]\|^2.$$

Sử dụng giả thiết (H1) và tính liên tục mạnh của $T(t)$, ta có

$$\mathrm{E}\,\|(T(t+\rho)-T(t))[\phi(0)-g(0,\phi,0)]\|^2\le 2M^2\mathrm{E}\,\|\phi(0)-g(0,\phi,0)\|^2.$$

Nhờ định lí hội tụ trội Lebesgue cùng với tính liên tục mạnh của $T(t)$, ta có ngay

$$\lim_{\rho\to 0}\mathrm{E}\,\|(T(t+\rho)-T(t))[\phi(0)-g(0,\phi,0)]\|^2=0.$$

Do toán tử $(-A)^{-\beta}$ là bị chặn nên từ giả thiết (H4) ta có $\lim\limits_{\rho\to 0}\mathrm{E}\,\|F_1(t+\rho)-F_1(t)\|^2=0$.

Tiếp theo, sử dụng giả thiết (H1), (H2) và bất đẳng thức Holder, ta có

$$\mathrm{E}\,\|F_2(t+\rho)-F_2(t)\|^2$$
$$\le 2\mathrm{E}\,\|\int_0^t[(T(\rho)-I)(-A)^{1-\beta}T(t-s)(-A)^{\beta}]g(s,x_s,\int_0^s a_1(s,\tau,x_\tau)d\tau)ds\|^2$$
$$+2\mathrm{E}\,\|\int_t^{t+\rho}(-A)^{1-\beta}T(t+\rho-s)(-A)^{\beta}g(s,x_s,\int_0^s a_1(s,\tau,x_\tau)d\tau)\|^2.$$

Bây giờ ta sẽ đánh giá các thành phần trong vế phải của bất đẳng thức trên

$$\left\|[(T(\rho)-I)(-A)^{1-\beta}T(t-s)(-A)^{\beta}]g(s,x_s,\int_0^s a_1(s,\tau,x_\tau)d\tau)ds\right\|^2$$
$$\le\|T(\rho)-I\|^2\frac{M_{1-\beta}^2}{(t-s)^{2(1-\beta)}}\left[k_2(1+k_1)\|x_s\|^2+k_2\bar{k}_1+\bar{k}_2\right]$$

và

$$\left\|(-A)^{1-\beta}T(t+\rho-s)(-A)^{\beta}g(s,x_s,\int_0^s a_1(s,\tau,x_\tau)d\tau)\right\|^2$$
$$\le\frac{M_{1-\beta}^2}{(t+\rho-s)^{2(1-\beta)}}\left[k_2(1+k_1)\|x_s\|^2+k_2\bar{k}_1+\bar{k}_2\right].$$

Sử dụng định lí hội tụ trội Lebesgue và các bất đẳng thức trên cùng với tính liên tục mạnh của $T(t)$, ta có $\mathrm{E}\,\|F_2(t+\rho)-F_2(t)\|^2\to 0$ khi

$|\rho|\to 0$. Lí luận tương tự ta có $\mathrm{E}\,\|\,F_3(t+\rho)-F_3(t)\,\|^2\to 0$ khi $|\rho|\to 0$.

Sử dụng các giả thiết (H1), (H6) ta có: $\mathrm{E}\,\|\,F_4(t+\rho)-F_4(t)\,\|^2$

$$\le 2\mathrm{E}\,\|\sum_{0<t_i<t}(T(\rho)-I)T(t-t_i)I_i(x(t_i^-))\,\|^2+2\mathrm{E}\,\|\sum_{t\le t_i<t+\rho}T(t+\rho-t_i)I_i(x(t_i^-))\,\|^2.$$

Mặt khác ta có: $\left\|(T(\rho)-I)T(t-t_i)I_i(x(t_i^-))\right\|^2\le\|\,T(\rho)-I\,\|^2 M^2\left[d_i\,\|\,x(t_i^-)\,\|^2\right]$

và $\left\|T(t+\rho-t_i)I_i(x(t_i^-))\right\|^2\le M^2\left[d_i\,\|\,x(t_i^-)\,\|^2\right]$. Vì vậy, ta có $\mathrm{E}\,\|\,F_4(t+\rho)-F_4(t)\,\|^2\to 0$ khi $|\rho|\to 0$.

Hơn nữa, ta có

$$\mathrm{E}\,\|\,F_5(t+\rho)-F_5(t)\,\|^2\le 2\mathrm{E}\,\|\int_0^t[(T(\rho)-I)T(t-s)]F(s)dB_Q^H(s)\,\|^2$$
$$+2\mathrm{E}\,\|\int_t^{t+\rho}T(t+\rho-s)F(s)dB_Q^H(s)\,\|^2:=N_1+N_2.$$

Sử dụng Bổ đề 2.1.4 và (H1), ta có

$$N_1\le 2cH(2H-1)t^{2H-1}\int_0^t\|\,[(T(\rho)-I)T(t-s)]F(s)\,\|_{L_Q^0}^2\,ds$$
$$\le 2cH(2H-1)t^{2H-1}M^2\int_0^t\|\,(T(\rho)-I)F(s)\,\|_{L_Q^0}^2\,ds\to 0 \text{ khi } |\rho|\to 0.$$

Từ đó, với mỗi s cố định $T(\rho)F(s)\to F(s),\ \|\,T(\rho)F(s)\,\|_{L_Q^0}^2\le M^2\,\|\,F(s)\,\|_{L_Q^0}^2$.

Sử dụng Bổ đề 2.1.4 một lần nữa, ta nhận được

$$N_2\le 2cH(2H-1)\rho^{2H-1}M^2\int_t^{t+\rho}\|\,F(s)\,\|_{L_Q^0}^2\,ds\to 0 \text{ khi } |\rho|\to 0.$$

Do đó $\lim_{\rho\to 0}\mathrm{E}\,\|\,F_5(t+\rho)-F_5(t)\,\|^2=0$.

Các ước lượng trên dẫn đến $\lim_{\rho\to 0}\mathrm{E}\,\|\,(\mathrm{L}x)(t+\rho)-(\mathrm{L}x)(t)\,\|^2=0$. Cho nên, hàm $t\mapsto(\mathrm{L}x)(t)$ là liên tục trên đoạn [0, b].

Tiếp theo, chúng tôi chứng minh ánh xạ L nén trên $\hat{\Lambda}_{b_1}$ với $b_1\le b$. Để làm điều này, giả sử $x,y\in\hat{\Lambda}_{b_1}$ và với $t\in[0,b]$ cố định. Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản, ta có

$$\mathrm{E}\,\|\,(\mathrm{L}x)(t)-(\mathrm{L}y)(t)\,\|^2$$
$$\le\frac{1}{k}\left\|(-A)^{-\beta}\right\|^2\|\,(-A)^{\beta}g(t,x_t,\int_0^t a_1(t,s,x_s)ds)-g(t,y_t,\int_0^t a_1(t,s,y_s)ds)\,\|^2$$
$$+\frac{3}{1-k}\,\|\int_0^t(-A)^{1-\beta}T(t-s)(-A)^{\beta}\left[g(s,x_s,\int_0^s a_1(s,\tau,x_\tau)d\tau)-g(s,y_s,\int_0^s a_1(s,\tau,y_\tau)d\tau)\right]ds\,\|^2$$
$$+\frac{3}{1-k}\,\|\int_0^t T(t-s)\left[f(s,x_s,\int_0^s a_2(s,\tau,x_\tau)d\tau)-f(s,y_s,\int_0^s a_2(s,\tau,y_\tau)d\tau)\right]ds\,\|^2$$
$$+\frac{3}{1-k}\,\|\sum_{0<t_i<t}T(t-t_i)\left[I_i(x(t_i^-))-I_i(y(t_i^-))\right]\|^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder và tính Lipschitz của $(-A)^{\beta}g$, f, $I_i, i=1,2,\ldots$, ta có

$$\mathrm{E}\,\|\,(\mathrm{L}x)(t)-(\mathrm{L}y)(t)\,\|^2 \le k\mathrm{E}\,\|\,x_t-y_t\,\|^2+\frac{3}{1-k}M_{1-\beta}^2\bar{k}^2\left(\frac{t^{2\beta-1}}{2\beta-1}\right)\int_0^t \mathrm{E}\,\|\,x_s-y_s\,\|\,ds$$

$$+\frac{3}{1-k}tM^2\bar{l}^2\int_0^t \mathrm{E}\,\|\,x_s-y_s\,\|\,ds+\frac{3}{1-k}M^2\left(\sum_{i=1}^{+\infty}d_i\right)^2.$$

Do đó, ta có $\lim\limits_{s\in[-r,t]}\mathrm{E}\,\|\,(\mathrm{L}x)(s)-(\mathrm{L}y)(s)\,\|^2 \le \omega(t)\sup\limits_{s\in[-r,t]}\mathrm{E}\,\|\,x(s)-y(s)\,\|^2$,

với $\omega(t)=k+\dfrac{3M_{1-\beta}^2\bar{k}^2}{(1-k)(2\beta-1)}t^{2\beta}+\dfrac{3M^2\bar{l}^2}{1-k}t^2+\dfrac{3M^2}{1-k}\left(\sum\limits_{i=1}^{+\infty}d_i\right)^2.$

Nhờ (7), ta có $\omega(0)=k+\dfrac{3M^2}{1-k}\left(\sum\limits_{i=1}^{+\infty}d_i\right)^2=\dfrac{3M^2\left(\sum\limits_{i=1}^{+\infty}d_i\right)^2}{(1-k)^2}<1.$

Do đó tồn tại $0<b_1<b$ sao cho $0<\omega(b_1)<1$ và toán tử L là nén trên $\hat{\Lambda}_{b_1}$. Vì vậy nó có duy nhất một điểm bất động trên đoạn $[0,b_1]$, đó chính là nghiệm tích phân của bài toán (1) – (3). Rõ ràng, nghiệm này có thể được tiếp tục kéo dài trong các khoảng thời gian liên tiếp và quá trình này có thể được lặp lại trong toàn bộ khoảng [−r, b] sau hữu hạn bước tương tự. Định lí được chứng minh.

3. Kết luận

Trong bài báo này chúng tôi sử dụng các kiến thức liên quan đến lí thuyết phương trình vi phân ngẫu nhiên, chuyển động Brown bậc phân số, lí thuyết nửa nhóm… và nguyên lí điểm bất động để thu được một kết quả mới về tính giải được và tính duy nhất nghiệm đối với lớp phương trình vi tích phân ngẫu nhiên trung tính có xung và chuyển động Brown bậc phân số chứa trễ hữu hạn, Định lí 2.2.2.

REFERENCES

[1] Caraballo, T., Garrido-Atienza, M.J., Taniguchi, T. (2011).The existence and exponential behavior of solutions to stochastic delay evolution equations with a fractional Brownian motion, *Nonlinear Analysis*, 74: 3671-3684.

[2] Dung, N.T. (2014). Neutral stochastic differential equations driven by a fractional Brownian motion with impulsive effects and varying-time delays, *J. Korean Statist. Soc*, 43: 599-608, Vietnam.

[3] Dung, N.T. (2015). Stochastic Volterra integro-differential equations driven by fractional Brownian motion in a Hilbert space, *Stochastics*, 87: 142-159, Vietnam.

[4] Mishura, Y. (2008). Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Topics, in: *Lecture Notes in Mathematics*, 1929.

[5] Nualart, D. (2006). The Malliavin Calculus and Related Topics, Second Edition, *Springer-Verlag, Berlin*.

[6] Pazy, A. (1983). Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. In: Applied Mathematical Sciences, 44. *Springer-Verlag, New York*.

[7] Tindel, S., Tudor, C.A., Viens, F. (2003). Stochastic evolution equations with fractional Brownian motion, *Probability Theory and Related Fields*, 127: 186-204.

[8] Yang, H., Jiang, F. (2013). Exponential stability of mild solutions to impulsive stochastic neutral partial differential equations with memory, Advances in Difference Equations.