TẠP CHÍ KHOA HỌC ĐẠI HỌC TÂN TRÀO
ISSN: 2354 - 1431
http://tckh.daihoctantrao.edu.vn/

FINDING ROOTS OF DIFFERENTIAL - INTEGRAL EQUATIONS BY THE IDENTITY METHOD

Le Thieu Trang
Tan Trao University, Viet Nam
Email adress: lttrang0466@tuyenquang.edu.vn
DOI: https://doi.org/10.51453/2354-1431/2022/744

Article info

Received: 25/03/2022
Revised: 03/05/2022
Accepted: 01/6/2022

Keywords:
Antiderivative, integral, differential – integral equation, identity, student.

Abstract:

To provide some math forms of differential - integral equations, as well as help students achieve remarkable results in exams such as National High School, Excellent Student Contests, and Olympiads, the author has mentioned how to use the homogenization method to find functions in the problem of differential - integral function equations. This helps form an effective way for students to encounter these math problems. These math exercises have been collected and synthesized from several documents and contests in recent years; the author has supplemented and formed general methods supporting students in different themes in studying and researching. Therefore, the students can design similar exercises by themselves.

TẠP CHÍ KHOA HỌC ĐẠI HỌC TÂN TRÀO
ISSN: 2354 - 1431
http://tckh.daihoctantrao.edu.vn/

TÌM NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH HÀM VI - TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỒNG NHẤT

Lê Thiếu Tráng
Trường Đại học Tân Trào, Việt Nam
Địa chỉ email: lttrang0466@tuyenquang.edu.vn
DOI: https://doi.org/10.51453/2354-1431/2022/744

Thông tin bài viết

Ngày nhận bài: 25/03/2022
Ngày sửa bài: 03/05/2022
Ngày duyệt đăng: 01/06/2022

Từ khóa:

Nguyên hàm, tích phân, phương trình vi - tích phân, đồng nhất, học sinh - sinh viên.

Tóm tắt

Với mục đích cung cấp một số dạng toán về phương trình vi phân - tích phân cũng như giúp các em học sinh đạt kết quả cao trong các kỳ thi như THPT Quốc gia, thi học sinh giỏi, Olympic, tác giả đã đề cập đến cách sử dụng phương pháp đồng dạng để tìm hàm số trong bài toán về phương trình hàm vi phân - tích phân. Từ đó giúp hình thành phương pháp giải hiệu quả cho học sinh khi gặp các dạng toán này. Các bài tập toán này được chúng tôi sưu tầm và tổng hợp từ một số tài liệu và một số cuộc thi trong những năm gần đây, tác giả đã bổ sung và hình thành những phương pháp chung hỗ trợ cho các em học sinh ở các chuyên đề khác nhau trong quá trình học tập và tìm hiểu. Vì vậy, các em hoàn toàn có thể tự thiết kế các bài tập tương tự..

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Vi phân và tích phân là một trong những chủ đề hay và khó trong chương trình giải tích của Trung học phổ thông và Đại học, đặc biệt là phần vận dụng và vận dụng cao trong các kì thi Trung học phổ thông Quốc gia, học sinh giỏi và Olympic học sinh - sinh viên.

Về phương trình hàm liên quan đến vi phân, tích phân đã có các giáo trình giảng dạy của ngành toán các trường Đại học và cả ở bậc Trung học phổ thông, đã có đầy đủ lý thuyết, bài tập thực hành bao gồm: Vi phân, tích phân, phương trình vi – tích phân cơ bản. Tuy nhiên, những năm gần đây, trong các kì thi của học sinh và sinh viên đa số phần này các em đều làm chưa tốt, trong bài viết này, tác giả tập trung khai thác một dạng toán tìm hàm số trong phương trình hàm vi-tích phân, giúp cho học sinh và sinh viên nhận dạng và giải quyết tốt những dạng toán này trong các kì thi và giúp người học chủ động xây dựng được hệ thống bài tập trong học tập và nghiên cứu. Các dạng toán phức tạp hơn tác giả sẽ giới thiệu trong các chuyên đề tiếp theo.

II. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

*** Kiến thức chuẩn bị**

2.1. Nguyên hàm [3]

2.1.1. Định nghĩa. *Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K $(K$ là một khoảng, một đoạn, hoặc nửa khoảng của □$)$. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x),\ \forall x\in K$.*

2.1.2. Định lí. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x)=F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên *K*.

Đảo lại, nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x)+C$, với C là hằng số tùy ý.

Họ nguyên hàm của $f(x)$ kí hiệu: $\int f(x)dx = F(x)+C$.

Hệ quả. Nếu biết $f'(x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \int g(x)dx = G(x)+C$.

2.1.3. Các phương pháp tính nguyên hàm. Ngoài phương pháp dùng bảng nguyên hàm cơ bản, ta còn có các phương pháp sau:

a. Phương pháp đổi biến số:

Định lí. Hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên *K* và hàm số $f(u)$ liên tục sao cho $f[u(x)]$ xác định trên K. Khi đó nếu F là một nguyên hàm của *f*, tức là:

$\int f(u)du = F(u)+C$ thì

$$\int f[u(x)].u'(x)dx = F[u(x)]+C.$$

b. Phương pháp tính nguyên hàm từng phần:

Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$ thì:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Hay viết gọn lại là: $\int udv = uv - \int vdu$.

2.2. Tích phân [4]

2.2.1. Định nghĩa. *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$, hiệu số $F(b)-F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a;b]$) của hàm số $f(x)$.*

Kí hiệu: $\int_a^b f(x)dx$.

Khi đó ta có: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$.

Hệ quả.

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$;

2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

3) Nếu $\int_a^b f(x)dx = 0$ thì $f(x) = 0$, với $a \neq b$.

4) Ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt = \ldots$$

2.2.2. Các phương pháp tính tích phân. Ngoài phương pháp dùng bảng nguyên hàm cơ bản, ta còn có các phương pháp sau [5]:

+ Phương pháp đổi biến số:

Định lí. Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên *K*, hàm số $y = f(u)$ liên tục và hàm hợp $f[u(x)]$ xác định trên *K*, $[a,b] \subset K$, ta có:

$$\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du.$$

+ Phương pháp tính tích phân từng phần:

Định lí. Nếu $u = u(x),\ v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$ thì:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

. Hay viết gọn lại là: $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$.

2.3. Một số bất đẳng thức tích phân [5]

2.3.1. Định lí 1. Cho hàm liên tục $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$ thì:

$\int_a^b f(x)dx \geq 0$, dấu bằng khi

$f(x) = 0, \forall x \in [a;b]$.

Hệ quả 1. Cho hàm liên tục $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ thì $\int_a^b [f(x)]^{2n}dx \geq 0$, dấu bằng xảy ra khi $f(x) = 0$, với mọi $x \in [a;b]$.

Hệ quả 2. Cho hai hàm liên tục $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ và $g:[a,b] \to \mathbb{R}$.

Nếu $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b]$ thì

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

2.3.2. Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân AM-GM (Inequality Arithmetic and Geometric Means). Cho n số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$, ta có:

$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$. Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

2.3.3. Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz: Cho $f, g : [a;b] \to \mathbb{R}$ là các hàm khả tích trên $[a;b]$.

Ta có: $\int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx \geq \left(\int_a^b f(x).g(x)dx\right)^2$, dấu bằng khi $f(x) = kg(x), k \neq 0$.

III. MỘT SỐ DẠNG TOÁN TÌM NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH HÀM VI - TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỒNG NHẤT

Trong nhiều chủ đề về phương trình hàm vi-tích phân, có một dạng toán thường gặp là: Biết một số giả thiết về giá trị hàm tại một điểm và biết một số đẳng thức về vi, tích phân của nó. Ta cần xác định hàm hoặc một số yếu tố liên quan đến hàm. Trong bài báo này, do khuôn khổ có hạn nên tác giả làm rõ một số dạng toán này từ nhận dạng, phân tích dẫn đến phương pháp chung để tìm hàm bằng phương pháp đồng nhất đa thức, đồng thời bạn đọc có thể chủ động xây dựng được hệ thống bài tập tương tự. Còn nhiều dạng toán liên quan khác, tác giả sẽ đề cập trong những bài viết tiếp theo.

3.1. Dạng toán 1. Tìm hàm $f(x)$ bằng đồng nhất nhị thức

Giả thiết bài toán có hai đẳng thức tích phân, chẳng hạn $\int_a^b f'^2(x)dx = M$, $\int_a^b x^3 f'(x)dx = N$ và một số giá trị hàm tại một điểm. Tìm $f(x)$ hoặc những biểu thức, phép toán liên quan đến $f(x)$.

Phương pháp. Tùy theo giả thiết ta đồng nhất nhị thức bằng các biểu thức thích hợp. Chẳng hạn với hai giả thiết ở trên có thể gợi ý đồng nhất $\left[f'^2(x) + ax^3\right]^2 = 0$ để tìm $f(x)$.

Ví dụ 1. Tìm hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, biết rằng $f(1) = 0$, $\int_0^1 f'^2(x)dx = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{1}{3}$ [2].

Phân tích. Ta thấy biểu thức dưới dấu tích phân có chứa $f'^2(x)$, do đó để sử dụng giả thiết này ta cần làm xuất hiện $f'(x)$. Như vậy phải xuất phát từ giả thiết $\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{1}{3}$ sử dụng phương pháp từng phần để có $f'(x)$. Sau đó từ các giả thiết đã có tiếp tục đánh giá để tìm hàm $f(x)$.

Giải. Trong tích phân: $I = \int_0^1 x^2 f(x)dx$.

Đặt $\begin{cases} f(x) = u \\ x^2 dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$.

Ta được:

$$I = \frac{x^3}{3} f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x)dx$$

$$= \frac{1}{3} f(1) - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3 f(x)dx = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 x^3 f'(x)dx = -1$$

.

Như vậy: $\int_0^1 x^3 f'(x)dx = -1$ và $\int_0^1 f^2{}'(x)dx = 7$.

Xét đồng nhất:

$$\left[f'(x) + ax^3\right]^2 = 0 \Leftrightarrow f'^2(x) + 2ax^3 f'(x) + a^2 x^6 = 0$$

Theo giả thiết ta có:

$$\int_0^1 \left[f'(x) + ax^3\right]^2 dx = \int_0^1 f^2{}'(x)dx + 2a\int_0^1 x^3 f'(x)dx + a^2\int_0^1 x^6 dx$$

$$= 7 - 2a + \frac{a^2}{7}.$$

Ta cần tìm a sao cho:

$$\int_0^1 \left[f'(x) + ax^3\right]^2 dx = 0 \Rightarrow 7 - 2a + \frac{a^2}{7} = 0 \Rightarrow a = 7$$

Vậy

$$\int_0^1 \left[f'(x) + 7x^3\right]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = -7x^3, \forall x \in [0;1]$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + C.$$

Thay $f(1) = 0$ ta được $C = \frac{7}{4}$. Vậy $f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4}$.

Ví dụ 2. Tìm hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1;4]$, thỏa mãn:

$$f(1)=1, f(4)=3\ln\frac{5}{2}+1,\ \int_1^4 \frac{f'(x)}{x+1}dx=\frac{9}{10} \text{ và}$$

$$\int_1^4 xf'^2(x)dx = 9\ln\frac{5}{2}-\frac{27}{10} \text{ [2].}$$

Phân tích. Về loại toán khá giống với ví dụ 1, tuy nhiên có độ phức tạp hơn và biểu thức đồng nhất cũng cần nhìn nhận sâu sắc hơn để tìm mối liên hệ giữa các biểu thức.

Giải. Giả thiết:

$$\int_1^4 xf'^2(x)dx = 9\ln\frac{5}{2}-\frac{27}{10} \Leftrightarrow \int_1^4 \left[\sqrt{x}f'(x)\right]^2 dx = 9\ln\frac{5}{2}-\frac{27}{10}$$

.

Ta cũng có:

$$\int_1^4 f'(x)dx = f(x)\Big|_1^4 = f(4)-f(1)=3\ln\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \int_1^4 \frac{xf'(x)}{x+1}dx = \int_1^4\left[f'(x)-\frac{f'(x)}{x+1}\right]dx = 3\ln\frac{5}{2}-\frac{9}{10}.$$

Hay $\int_1^4 \sqrt{x}f'(x).\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx = 3\ln\frac{5}{2}-\frac{9}{10}$. Dẫn đến xét đồng nhất:

$$\left[\sqrt{x}f'(x)+\frac{a\sqrt{x}}{x+1}\right]^2=0$$

$$\Leftrightarrow xf'^2(x)+2a\frac{xf'(x)}{x+1}+\frac{a^2x}{(x+1)^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^4 xf'^2(x)dx + 2a\int_1^4\frac{xf'(x)}{x+1}dx + a^2\int_1^4\frac{x}{(x+1)^2}dx = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+3)^2=0 \Rightarrow a=-3 \Rightarrow \sqrt{x}f'(x)=\frac{3\sqrt{x}}{x+1}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{x+1} \Rightarrow f(x)=3\ln|x+1|+C.$$

Thay $f(1)=1 \Rightarrow C=1-3\ln 2$.

Vậy $f(x)=3\ln|x+1|+1-3\ln 2$.

Nhận xét. Trong hai ví dụ trên ta thấy, để tìm hàm $\boldsymbol{f(x)}$ ta cần xử lí giả thiết, sau đó tìm biểu thức đồng nhất thích hợp. Đây là tư tưởng cho hàng loạt dạng toán như trên. Tuy nhiên, có những bài cần bổ sung tham số khi tích phân từng phần, hoặc tìm biểu thức đồng nhất thích hợp hơn. Các bài tập tự luyện ở phần sau, người học có thể tự đưa ra hệ thống bài tập tương tự.

Ví dụ 3. Tìm hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$. Biết rằng:

$$f(1)=0,\ \int_0^1 f'^2(x)dx=\frac{3}{2}-2\ln 2 \text{ và}$$

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}dx = 2\ln 2-\frac{3}{2} \text{ [2].}$$

Phân tích. Dạng toán tương tự ví dụ trên, nhưng khi tích phân từng phần $\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}dx$ sẽ xuất hiện giá trị $f(0)$ chưa biết. Ta cần khử $f(0)$ trong quá trình tìm $f(x)$.

Giải. Trong tích phân $I=\int_0^1\frac{f(x)}{(x+1)^2}dx$,

đặt $\begin{cases} f(x)=u \\ \frac{1}{(x+1)^2}dx=dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=f'(x)dx \\ v=\frac{-1}{x+1} \end{cases}.$

Nhận được:

$$I=\frac{-f(x)}{x+1}\Big|_0^1+\int_0^1\frac{f'(x)}{x+1}dx = -\frac{f(1)}{2}+f(0)+\int_0^1\frac{f'(x)}{x+1}dx$$

.

Như vậy sẽ còn $f(0)$ chưa biết. Để tìm $f(0)$, ta đưa vào tham số như sau:

Đặt: $\begin{cases} f(x)=u \\ \frac{1}{(x+1)^2}dx=dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=f'(x)dx \\ v=\frac{-1}{x+1}+k \end{cases}.$

Khi đó:

$$\int_0^1\frac{f(x)}{(x+1)^2}dx=\left(-\frac{1}{x+1}+k\right)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\left(-\frac{1}{x+1}+k\right)f'(x)dx$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+k\right)f(1)-(1-k)f(0)-\int_0^1\left(-\frac{1}{x+1}+k\right)f'(x)dx$$

$=-(1-k)f(0)-\int_0^1\left(-\frac{1}{x+1}+k\right)f'(x)dx$. Chọn k sao cho $1-k=0 \Rightarrow k=1$.

Ta được:

$$\int_0^1\frac{f(x)}{(x+1)^2}dx=2\ln 2-\frac{3}{2} \Leftrightarrow \int_0^1\frac{x}{x+1}f'(x)dx=\frac{3}{2}-2\ln 2$$

Từ gợi ý biểu thức dưới dấu tích phân, ta sẽ dùng đồng nhất:

$$\left[f'(x)+a\frac{x}{x+1}\right]^2=0\Leftrightarrow f'^2(x)+2a\frac{xf'(x)}{x+1}+\left(\frac{ax}{x+1}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow\int_0^1\left[f'(x)+a\frac{x}{x+1}\right]^2dx=\int_0^1\left[f'^2(x)+2a\frac{xf'(x)}{x+1}+\left(\frac{ax}{x+1}\right)^2\right]dx$$

$$=\int_0^1 f'^2(x)dx+2a\int_0^1\frac{xf'(x)}{x+1}dx+\int_0^1\left(\frac{ax}{x+1}\right)^2dx\cdot$$

Ta có: $\int_0^1 f'^2(x)dx=\frac{3}{2}-2\ln 2$ (giả thiết);

$2a\int_0^1\frac{xf'(x)}{x+1}dx=2a\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)$ (đã tính ở trên);

$$\int_0^1\left(\frac{ax}{x+1}\right)^2dx=a^2\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^2dx=a^2\int_0^1\left[1-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right]^2dx=a^2\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)$$

.

Do đó:

$$\int_0^1\left[f'(x)+a\frac{x}{x+1}\right]^2dx=\frac{3}{2}-2\ln 2+2a\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)+a^2\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)$$

Để

$$\int_0^1\left[f'(x)+a\frac{x}{x+1}\right]^2dx=0\Rightarrow\frac{3}{2}-2\ln 2+2a\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)+a^2\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)=0\Rightarrow a=-1$$

Vậy:

$$f'(x)=\frac{x}{x+1}\Rightarrow f(x)=\int\frac{x}{x+1}dx=\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=x-\ln|x+1|+C$$

Thay $f(1)=0\Rightarrow C=\ln 2-1\Rightarrow$

$f(x)=x-\ln|x+1|+\ln 2-1\cdot$

Ví dụ 4. Tìm hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$, thỏa mãn:

$f(1)=0$ và

$f'^2(x)=-\ 4f(x)+8x^2+16x-8,\ \forall x\in[-1;1]$ [2].

Phân tích. Với các giả thiết đã cho, ta thấy vẫn cần tìm biểu thức $f'(x)$ để đồng nhất. Tuy nhiên còn thiếu $f(-1)$. Do đó ta cần một tham số để khử $f(-1)$.

Giải. Xét $I=\int_{-1}^1 2f(x)dx\cdot$

Đặt $\begin{cases}f(x)=u\\2dx=dv\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\v=2x+k\end{cases}$, khi đó:

$$I=(2x+k)f(x)\Big|_{-1}^1-\int_{-1}^1(2x+k)f'(x)dx$$

$$=-(k-2)f(-1)-\int_{-1}^1(2x+k)f'(x)dx\cdot$$

Chọn $k=2$ ta được

$$I=\int_{-1}^1 2f(x)dx=-\int_{-1}^1(2x+2)f'(x)dx\cdot$$

Từ giả thiết:

$$f'^2(x)=-\ 4f(x)+8x^2+16x-8,\ \forall x\in[-1;1]$$

$$\Rightarrow\int_{-1}^1 f'^2(x)\ dx=-2\int_{-1}^1 2f(x)\ dx+\int_{-1}^1\left(8x^2+16x-8\right)dx$$

$$\Leftrightarrow\int_{-1}^1 f'^2(x)\ dx=2\int_{-1}^1(2x+2)f'(x)\ dx+\int_{-1}^1\left(8x^2+16x-8\right)dx$$

$$\Leftrightarrow\int_{-1}^1\left[f'(x)-(2x+2)\right]^2dx=\int_{-1}^1(2x+2)^2dx+\int_{-1}^1\left(8x^2+16x-8\right)dx=0$$

.

Do đó

$f'(x)=2x+2\Rightarrow f(x)=x^2+2x+C$. Thay $f(1)=0\Rightarrow C=-3\cdot$

Vậy $f(x)=x^2+2x-3\cdot$

Nhận xét. Qua hai ví dụ trên, ta thấy rõ phương pháp xử lí dạng toán đồng nhất nhị thức, có thể cần đưa vào tham số trong tích phân từng phần khi còn giá trị hàm số chưa biết. Người học có thể dựa vào dạng toán và phương pháp trên tự xây dựng được hệ thống bài tập trong quá trình học tập và nghiên cứu.

3.2. Dạng toán 2. Tìm hàm $f(x)$ bằng đồng nhất tam thức

Bài toán được xét tương tự các dạng trên, nhưng số lượng đẳng thức nhiều hơn, chẳng hạn có các giả thiết:

$\int_a^b f(x)dx=M$, $\int_a^b xf(x)dx=N$,

$\int_a^b f^2(x)dx=P$. Tìm $f(x)$ hoặc những biểu thức, phép toán liên quan đến $f(x)$.

Phương pháp. Từ số lượng giả thiết gợi ý liên kết với tam thức (hoặc hơn nữa) tùy theo số lượng giả thiết, chẳng hạn như ba giả thiết trên gợi ý liên kết tam thức $\left[f(x)+ax+b\right]^2$.

Ví dụ 5. Tìm hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn:

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx=1 \text{ và } \int_0^1 f^2(x)dx=4$$

[1].

Phân tích. Từ các giả thiết ta thấy các biểu thức tích phân cùng cận và các biểu thức dưới dấu tích phân chứa $f^2(x)$, $xf(x)$, $f(x)$ nên để đồng nhất, gợi ý xuất phát từ tổng ba số bình phương.

Giải. Xét đồng nhất:

$$\left[f(x)+ax+b\right]^2=0 \Leftrightarrow f^{\prime 2}(x)+2axf(x)+2bf(x)+a^2x^2+2abx+b^2x^2=0$$

.

$\Leftrightarrow$

$$\int_0^1 f^2(x)dx+2a\int_0^1 xf(x)dx+2b\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1\left(a^2x^2+2bx+b^2\right)dx=0$$

$\Leftrightarrow 4+2(a+b)+\dfrac{a^2}{3}+ab+b^2=0$. Ta cần tìm a, b sao cho:

$$\int_0^1\left[f(x)+ax+b\right]^2dx=0,$$

hay $4+2(a+b)+\dfrac{a^2}{3}+ab+b^2=0$

$\Leftrightarrow a^2+(3b+6)a+3b^2+6b+12=0$. Từ đây tìm được $b=2;\ a=-6$.

Vậy từ

$$\int_0^1\left[f(x)-6x+2\right]^2dx=0 \Rightarrow f(x)=6x-2, \forall x\in[0;1]$$

.

Ví dụ 6. Tìm hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$. Biết rằng:

$ef(1)=4f(0)=4$ và

$$\int_0^1 e^{2x}\left[f^{\prime 2}(x)-f^2(x)\right]dx+4\int_0^1 e^xf(x)dx=\frac{8}{3} \text{ [1].}$$

Phân tích. Từ giả thiết ta thấy chỉ có một đẳng thức đối với tích phân. Ta cần xem xét kĩ để làm gọn biểu thức và đưa về dạng đã biết.

Giải. Xét

$$I=\int_0^1 e^{2x}\left[f^{\prime 2}(x)-f^2(x)\right]dx+4\int_0^1 e^xf(x)dx=\frac{8}{3}$$

. Đặt $u(x)=e^xf(x)$, khi đó:

$$u'=e^xf(x)+e^xf'(x)\Rightarrow e^xf'(x)=u'-u,$$

với $u(1)=4,\ u(0)=1$.

Như vậy:

$$I=\int_0^1\left[(u'-u)^2-u^2+4u\right]dx=\int_0^1\left[u^{\prime 2}-2uu'+4u\right]dx=\frac{8}{3}$$

.

Ta có:

$$\int_0^1 uu'dx=\left.\frac{u^2}{2}\right|_0^1=\frac{15}{2};$$

$$\int_0^1 udx=\left.xu\right|_0^1-\int_0^1 xu'dx=4-\int_0^1 xu'dx,$$

thay vào trên được:

$I=\displaystyle\int_0^1\left[u^{\prime 2}-4xu'\right]dx=\frac{8}{3}$. Dùng đồng nhất $\displaystyle\int_0^1(u'-2x-a)^2dx=0$ tìm được $a=2$

Do đó $u'=2x+2$. Theo cách đặt suy ra $e^xf(x)+e^xf'(x)=2x+2$

$\Leftrightarrow\left[e^xf(x)\right]'=2x+2$

$\Rightarrow e^xf(x)=\int(2x+2)dx=x^2+2x+C$.

Thay $f(0)=1\Rightarrow C=1$.

Vậy $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{e^x}=(x+1)^2e^{-x}$.

Nhận xét. Qua hai ví dụ trên ta thấy, hướng xử lí bài toán có phần phức tạp hơn, đòi hỏi phải phát hiện được mối quan hệ từ các giả thiết dẫn đến xác định biểu thức đồng nhất.

3.3. Dạng toán 3. Tìm $f(x)$ khi biết một bất đẳng thức tích phân đối với $f(x)$

Trong bài báo này tác giả chỉ đề cập dạng tìm hàm bằng cách dùng một số bất đẳng thức cơ bản. Nội dung đầy đủ về bất đẳng thức tích phân sẽ được trình bày trong một chuyên đề khác.

Dạng 3.1. Sử dụng tính chất: $\displaystyle\int_a^b f^{2n}(x)dx\ge 0$, *dấu bằng khi* $f(x)=0,\forall x\in[a;b]$.

Ví dụ 7. Tìm hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên $[0,1]$, thỏa mãn:

$$f(1) = ef(0) = e \text{ và } \int_0^1 \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]^2 dx \le 1 \text{ [1].}$$

Phân tích. Từ giả thiết ta thấy sẽ tồn tại một hằng số m sao cho có đẳng thức xảy ra. Để tìm m, ta dùng phương pháp đồng nhất. Lời giải như sau:

Giải. Xét:

$$\int_0^1 \left[\frac{f'(x)}{f(x)} - m\right]^2 dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]^2 - 2m.\frac{f'(x)}{f(x)} + m^2\right] dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]^2 dx = \int_0^1 \left[2m.\frac{f'(x)}{f(x)} - m^2\right] dx.$$

Ta có:

$$\int_0^1 \left[2m.\frac{f'(x)}{f(x)} - m^2\right] dx = 2m\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx - m^2\int_0^1 dx = 2m\ln\left|f(x)\right|\Big|_0^1 - m^2 x\Big|_0^1$$

$$= 2m - m^2.$$

Do

$$\int_0^1 \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]^2 dx \le 1 \Leftrightarrow 2m - m^2 \le 1 \Leftrightarrow (m-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy

$$\int_0^1 \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]^2 dx \le 1$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[\frac{f'(x)}{f(x)} - 1\right]^2 dx \le 0 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \Rightarrow f(x) = ke^x$$

.

Vì $f(1) = ef(0) = e$ nên $k = 1 \Rightarrow f(x) = e^x$.

Nhận xét. Việc đưa vào tham số để bất đẳng thức xảy ra dấu bằng thường được dùng trong những bất đẳng thức đơn giản. Đối với những bài phức tạp hơn, ta có thể xử lí bằng các bất đẳng thức cơ bản (xét ở các dạng sau), hoặc đưa về các hằng đẳng thức.

Ví dụ 8. Tìm hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên $[0;1]$. Biết rằng:

$f(1) - f(0) = 1$ và

$$\int_0^1 f'(x)\left[3f^2(x) + 2\right]dx \le \int_0^1 2\sqrt{6f'(x)}.f(x)dx \text{ [1].}$$

Phân tích. Ta thấy trong bất đẳng thức đã cho có chứa biểu thức bậc hai của $f(x)$, ta sẽ đưa về hằng đẳng thức để đánh giá dấu bằng.

Giải. Ta biến đổi giả thiết như sau:

$$\int_0^1 f'(x)\left[3f^2(x) + 2\right]dx \le \int_0^1 2\sqrt{6f'(x)}.f(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(f'(x)\left[3f^2(x) + 2\right] - 2\sqrt{6f'(x)}.f(x)\right)dx \le 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(\sqrt{3f'(x)}.f(x) - \sqrt{2}\right)^2 dx \le 2\int_0^1 \left(x - f'(x)\right)dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3f'(x)}.f(x) - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow f'(x)f^2(x) = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \int f'(x)f^2(x)dx = \frac{2}{3}\int dx \Leftrightarrow \frac{1}{3}f^3(x) = \frac{2}{3}x + C$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{2x + C}.$$

Ta có: $f(0) = \sqrt[3]{C}; f(1) = \sqrt[3]{2 + C}$. Thay vào giả thiết $f(1) - f(0) = 1$ ta được:

$$\sqrt[3]{2 + C} - \sqrt[3]{C} = 1 \Rightarrow C = \frac{2\sqrt{21}}{9} - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{2x + \frac{2\sqrt{21}}{9} - 1}.$$

Dạng 3.2. Dùng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân AM-GM (Inequality Arithmetic and Geometric Means)

Ví dụ 9. Tìm hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$. Biết rằng:

$$f(1) = ef(0) \text{ và } \int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)} + \int_0^1 f'^2(x)dx \le 2. \quad \text{[1]}$$

Phân tích. Bất đẳng thức đã cho có dạng nghịch đảo, điều đó gợi ý cho ta dùng bất đẳng thức AM-GM, mục đích tìm ra bất đẳng thức ngược chiều với giả thiết.

Giải. Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)} + \int_0^1 f'^2(x)dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{f^2(x)} + f'^2(x)\right]dx$$

$$\ge 2\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = 2\ln\left|f(x)\right|\Big|_0^1 = 2\ln\left|\frac{f(1)}{f(0)}\right| = 2\ln e = 2$$

.

Do giả thiết:

$$\int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)} + \int_0^1 f'^2(x)dx \le 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)f'(x) = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)f'(x)dx = \int_0^1 x\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = x + C \Rightarrow f(x) = \sqrt{2x+2C}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)f'(x)dx = \int_0^1 x\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = x + C \Rightarrow f(x) = \sqrt{2x+2C}$$

Vì $f(1) = ef(0)$ nên $C = \frac{1}{e^2-1} \Rightarrow f(x) = \sqrt{2x + \frac{2}{e^2-1}}$.

Dạng 3.3. Sử dụng Bất đẳng thức Cauchy-Schawarz

Ví dụ 10. Tìm hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$. Biết rằng:

$f(1) = 0$, $\int_0^1 f'^2(x)dx = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{1}{3}$ [1].

Phân tích. Bài toán này phần trên chúng ta đã dùng phương pháp đồng nhất. Tuy nhiên, nếu đánh giá và sử dụng bất đẳng hợp lí sẽ có lời giải hay và ngắn gọn hơn.

Giải. Tích phân từng phần $\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{1}{3}$ ta được:

$$\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{x^3}{3}f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x)dx \Leftrightarrow \int_0^1 x^3 f'(x)dx = -1$$

.

Mặt khác, dùng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\left(\int_0^1 x^3 f'(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 x^6 dx . \int_0^1 f'^2(x)dx = 1 \Rightarrow -1 \le \int_0^1 x^3 f'(x)dx \le 1$$

.

Từ đó phải có đẳng thức xảy ra, tức là $f'(x) = kx^3$. Thay vào trên tìm được $k = -7$.

Vậy $f'(x) = -7x^3, \forall x \in [0;1] \Rightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x + C$.

Thay $f(1) = 0 \Rightarrow C = \frac{7}{4} \Rightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4}$.

Nhận xét. Trong thực tế, việc tìm bất đẳng thức ngược chiều với giả thiết khá phổ biến. Để làm được điều đó, chúng ta cần có những đánh giá thích hợp nhờ các bất đẳng thức cơ bản. Những bài toán tương tự trong phần bài tập tự luyện. Trong các ví dụ trên, mới chỉ lấy một ví dụ minh họa, các bài tập tương tự sẽ cho trong phần tự luyện tập.

Riêng phần bất đẳng thức tích phân, tác giả sẽ đi sâu và đầy đủ trong một chuyên đề khác. Trong bài báo này, tác giải chỉ dừng lại ở việc tìm hàm số bằng bất đẳng thức cơ bản.

Sau đây là các bài tập tự luyện. Người đọc cần nhận dạng và sử dụng phương pháp thích hợp như các ví dụ mẫu ở trên. Sau đó các bạn thử xây dựng mỗi dạng toán một số bài xem còn mắc ở bước nào, vì các bạn vẫn cần một số phép thử đặc biệt thì mới được một bài toán đẹp.

Bài tập tự luyện [1], [2], [4].

Bài 1. Tìm hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn:

$f(1) = 1$, $\int_0^1 x^5 f(x)dx = \frac{11}{78}$ và

$\int_0^1 f'(x)d[f(x)] = \frac{4}{13}$.

Hướng dẫn: Đồng nhất $\left[f'(x) + ax^6\right]^2 = 0$.

Kết quả $f(x) = \frac{2}{7}x^6 + \frac{5}{7}$.

Bài 2. Tìm hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn:

$$f(1) = 1, \quad \int_0^1 xf(x)\,dx = \frac{4}{15} \text{ và}$$

$$\int_0^1 f'^2(x)dx = \frac{49}{45}.$$

Hướng dẫn. Đồng nhất $\left[f'(x) + ax^2\right]^2 = 0$.

Kết quả: $f(x) = \frac{7}{9}x^3 + \frac{2}{9}$.

Bài 3. Tìm hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn:

$$f(1) = 1, \quad \int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx = \frac{2}{5} \text{ và } \int_0^1 f'^2(x)dx = \frac{9}{5}.$$

Hướng dẫn. Đồng nhất $\left[f'(x)+ax^2\right]^2=0$. Kết quả: $f(x)=x^3$.

Bài 4. Tìm hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn:

$f(1)=0$, và

$$\int_0^1 f'^2(x)dx=\int_0^1(x+1)e^x f(x)dx=\frac{e^2-1}{4}.$$

Hướng dẫn. Đồng nhất $\left[f'(x)+axe^x\right]^2=0$. Kết quả: $f(x)=-xe^x+e^x$.

Bài 5. Tìm hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn:

$f(0)+f(1)=0$, $\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{1}{2}$ và

$\int_0^1 f'(x)\cos\pi x dx=\frac{\pi}{2}$. Tìm $f(x)$.

Hướng dẫn. Đồng nhất $\left[f(x)+a\sin\pi x\right]^2=0$. Kết quả: $f(x)=\sin\pi x$.

Bài 6. Tìm hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn:

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f'^2(x)dx=\frac{\pi}{4}$ và $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x f(x)dx=\frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn. Đồng nhất $\left[f'(x)+a\sin x\right]^2=0$. Kết quả: $f(x)=\cos x$.

Bài 7. Tìm hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$, thỏa mãn:

$f(2)=0$, $\int_1^2(x-1)^2 f(x)dx=-\frac{1}{3}$ và

$\int_1^2 f'^2(x)dx=7$.

Hướng dẫn. Đồng nhất $\left[f'(x)+a(x-1)^3\right]^2=0$.

$f(x)=\frac{7}{4}(x-1)^4-\frac{7}{4}$.

Bài 8. Tìm hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$, thỏa mãn:

$f(-1)=0$, $\int_{-1}^{1}x^2 f(x)dx=\frac{16}{3}$ và $\int_{-1}^{1}f'^2(x)dx=112$.

Hướng dẫn. Đồng nhất $\left[f'(x)+a(x^3-1)\right]^2=0$. Kết quả: $f(x)=-\frac{7}{4}x^4+7x+\frac{35}{4}$.

Bài 9. Tìm hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$, đồng biến trên $[1;2]$ thỏa mãn:

$f(1)=0,\ \int_1^2 f'^2(x)dx=2$ và

$\int_1^2 f(x)f'(x)dx=1$.

Hướng dẫn. Đồng nhất $\left[f'(x)+a\right]^2=0$. Kết quả $f(x)=\sqrt{2}x-\sqrt{2}$.

Bài 10. Tìm hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1;4]$, thỏa mãn:

$f(1)=-1, f(4)=-8$ và

$f'^2(x)\sqrt{x^3}-f(x)=9\sqrt{x^3}-\sqrt{x}-3x,\ \forall x\in[1;4]$.

Hướng dẫn. Từ giả thiết ta có:

$$f'^2(x)-\frac{f(x)}{\sqrt{x^3}}=9-\frac{1}{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}.$$

$$\Rightarrow\int_1^4 f'^2(x)dx-\int_1^4\frac{f(x)}{\sqrt{x^3}}dx=\int_1^4\left(9-\frac{1}{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx=\left(9x-\ln|x|-6\sqrt{x}\right)\Big|_1^4=21-2\ln2$$

Dùng tích phân từng phần tính $\int_1^4\frac{f(x)}{\sqrt{x^3}}dx$.

Đặt $\begin{cases}f(x)=u\\ \dfrac{dx}{\sqrt{x^3}}=dv\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\ v=-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+k\end{cases}$, ta được:

$$\int_1^4\frac{f(x)}{\sqrt{x^3}}dx=\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}+k\right)f(x)\Big|_1^4-\int_1^4\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}+k\right)f'(x)dx$$
$$=7k-6+2\int_1^4\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{k}{2}\right)f'(x)dx.$$

Thay vào trên ta được:

$$\int_1^4 f'^2(x)dx+7k-6-2\int_1^4\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{k}{2}\right)f'(x)dx=21-2\ln2$$

$$\Leftrightarrow\int_1^4\left[f'(x)-\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{k}{2}\right)\right]^2dx-2\ln2+9k-6-\frac{3k^2}{4}-6=21-2\ln2$$

Chọn $k=6$ thì $\int_1^4\left[f'(x)-\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{6}{2}\right)\right]^2dx=0$, hay $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-3\Rightarrow f(x)=2\sqrt{x}-3x$.

Bài 11. Tìm hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn:

$$\int_0^1 f^2(x)dx=5 \text{ và } \int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 \sqrt{x}f(x)dx=1\cdot$$

Tìm $f(x)$.

Hướng dẫn. Đồng nhất $\left[f(x)+ax+b\sqrt{x}\right]^2=0$. Kết quả $f(x)=15x\text{-}15\sqrt{x}$.

Bài 12. Tìm hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, biết: $f(0)=0$, $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\frac{1}{12}$ và $\int_0^{\frac{1}{2}} f'^2(x)dx=\frac{1}{6}\cdot$

Hướng dẫn. Trong $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\frac{1}{12}$, đặt $\begin{cases}f(x)=u\\ dx=dv\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\ v=x+k\end{cases}$, chọn được $k=-\frac{1}{2}$.

Đồng nhất $\left[f'(x)+a(2x-1)\right]^2=0\Rightarrow a=-1\cdot$ Kết quả: $f(x)=x^2-x$.

Bài 13. Tìm hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, biết: $f(0)=0$, $\int_0^2 f'^2(x)dx=\frac{2}{3}$ và $\int_0^2 f(x)dx=-\frac{4}{3}\cdot$

Hướng dẫn. Trong $\int_0^2 f(x)dx=\frac{2}{3}$, đặt $\begin{cases}f(x)=u\\ dx=dv\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\ v=x+k\end{cases}$, chọn được $k=-2$.

Xét đồng nhất $\left[f'(x)+a(x-2)\right]^2=0\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$. Kết quả $f(x)=\frac{1}{4}x^2-x$.

Bài 14. Tìm hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, biết: $f(0)=0$, $\int_0^2 f'^2(x)dx=\frac{2}{3}$ và $\int_0^2 f(x)dx=\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn. Trong $\int_0^2 f(x)dx=\frac{2}{3}$, đặt $\begin{cases}f(x)=u\\ dx=dv\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\ v=x+k\end{cases}$, chọn được $k=-2$.

Xét đồng nhất: $\left[f'(x)+a(x-2)\right]^2=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

Kết quả: $f(x)=\frac{1}{4}(x-2)^2+1\cdot$

Bài 15. . Tìm hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, biết $f(0)=1$, $\int_0^{\frac{1}{2}} f'^2(x)dx=\frac{1}{6}$ và $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\frac{5}{12}\cdot$

Hướng dẫn. Trong $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\frac{1}{6}$, đặt $\begin{cases}f(x)=u\\ dx=dv\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\ v=x+k\end{cases}$, chọn được $k=-\frac{1}{2}\cdot$

Xét đồng nhất: $\left[f'(x)+a(2x-1)\right]^2=0\Rightarrow a=-1\cdot$ Kết quả: $f(x)=x^2-x+1$.

Bài 16. Tìm hàm số $f(x)>0$, có đạo hàm $f'(x)>0$, liên tục trên $[0,1]$ thỏa mãn:

$f(0)=1$ và

$$\int_0^1\left[f^3(x)+4f'^3(x)\right]dx\le 3\int_0^1 f'(x)f^2(x)dx\cdot$$

Hướng dẫn. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số dương ta có:

$$f^3(x)+4f'^3(x)=4f'^3(x)+\frac{1}{2}f^3(x)+\frac{1}{2}f^3(x)\ge 3\sqrt[3]{4f'^3(x).\frac{1}{2}f^3(x).\frac{1}{2}f^3(x)}$$
$$=3f'(x)f^2(x)\Rightarrow$$
$$\int_0^1\left[f^3(x)+4f'^3(x)\right]dx\ge 3\int_0^1 f'(x)f^2(x)dx\cdot$$

Kết hợp giả thiết ta có:

$$4f'^3(x)=\frac{1}{2}f^3(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}f(x)\Rightarrow\ln|f(x)|=\frac{1}{2}x+C\Rightarrow f(x)=e^{\frac{1}{2}x+C}$$

Bài 17. Tìm hàm số $f(x)>0$, có đạo hàm $f'(x)>0$, liên tục trên $[0,1]$ thỏa mãn:

$f(0)=1, f(1)=e^2$ và $\int_0^1\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx\ge 1$. Tìm $f(x)$.

Hướng dẫn. Cần chỉ ra $\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx \le 1$. Ta có:

$\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} = \sqrt{x}.\sqrt{\frac{f'(x)}{f(x)}}$.

Xét đồng nhất: $\sqrt{x}.\sqrt{\frac{f'(x)}{f(x)}} \le ax + b.\frac{f'(x)}{f(x)}$. Ta có:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + mx \ge 2\sqrt{m}.\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}, m \ge 0, x \in [0;1].$$

Vậy ta cần tìm m ≥ 0 để:

$$\int_0^1 \left[\frac{f'(x)}{f(x)} + mx\right]dx \ge 2\sqrt{m}.\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx.$$

Hay: $\ln|f(x)|\Big|_0^1 \ge 2\sqrt{m}.1 \Leftrightarrow 2 + \frac{m}{2} \ge 2\sqrt{m}$. Dấu bằng xảy ra khi m = 4.

Từ đó suy ra:

$$4 = \int_0^1 \left[\frac{f'(x)}{f(x)} + 4x\right]dx \ge 4\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx \le 1$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{f'(x)}{f(x)} = 4x \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int 4xdx$. Tìm được $f(x) = e^{2x^2}$.

Bài 18. Tìm hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0,1]$ biết: $f(0) = 1, f(1) = \sqrt{3}$ và $\int_0^1 [f(x)f'(x)]^2 dx \le 1$.

Hướng dẫn. Với m ≥ 0, xét: $[f(x)f'(x)]^2 + m \ge 2\sqrt{m}.f(x)f'(x)$, hay cần tìm m sao cho:

$$\int_0^1 \left[[f(x)f'(x)]^2 + m\right]dx \ge 2\sqrt{m}.\int_0^1 [f(x)f'(x)]dx$$

$\Rightarrow 1 + m \ge 2\sqrt{m}$. Dấu bằng xảy ra khi $m = 1$.

Khi đó:

$$\int_0^1 \left[[f(x)f'(x)]^2 + 1\right]dx = \int_0^1 [f(x)f'(x)]^2 dx + \int_0^1 dx \ge 2\int_0^1 f(x)f'(x)dx = 2$$

Dấu bằng xảy ra khi $f(x)f'(x) = \pm 1$. Thử lại tìm được $f(x) = \sqrt{2x+1}$.

Bài 19. Tìm hàm $f(x) > 0$, có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ thỏa mãn:

$f(1) = 1, f(2) = 16$ và $\int_1^2 \frac{f^2{}'(x)}{xf(x)}dx \le 24$.

Hướng dẫn. Ta có: $\frac{f^2{}'(x)}{xf(x)} = \frac{1}{x}.\frac{f^2{}'(x)}{f(x)}$, gợi ý dùng bất đẳng thức AM-GM:

$$\frac{f^2{}'(x)}{xf(x)} + mx \ge 2m\sqrt{\frac{f^2{}'(x)}{f(x)}} = 2m\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}, m \ge 0, x \in [1;2]$$

Khi đó:

$24 + \frac{2m}{3} \ge 4m\sqrt{f(x)}\Big|_1^2 \Leftrightarrow 24 + \frac{2m}{3} \ge 12\sqrt{m}$, dấu bằng khi $m = 16$. Tìm được $f(x) = x^4$.

Bài 20. Tìm hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ và thỏa mãn $\int_1^2 x^3 f(x)dx = 31$.

Hướng dẫn: Áp dụng hai lần bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$31^4 \le \left(\int_1^2 x^3 f(x)dx\right)^4 = \left[\left(\int_1^2 x^2.xf(x)dx\right)^2\right]^2 \le \left(\int_1^2 x^4 dx\right)^2 \left(\int_1^2 x^2 f^2(x)dx\right)^2$$

$$\le \left(\int_1^2 x^4 f(x)dx\right)^3 \int_1^2 f^4(x)dx \Rightarrow \int_1^2 f^4(x)dx \ge \frac{31^4}{\left(\int_1^2 x^4 dx\right)^3} = 3875$$

Dấu bằng khi

$$f(x) = kx \Rightarrow k\int_1^2 x^4 dx = 31 \Rightarrow k = 5 \Rightarrow f(x) = 5x^2.$$

Bài 21. Tìm hàm $f(x) > 0$ có đạo hàm $f'(x) > 0$, liên tục trên $[0,1]$, thỏa mãn:

$$f(0) = 1, f(1) = e^2 \text{ và } \int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx \ge 1.$$

Hướng dẫn. Theo bất đẳng thức Cauchy-Shwarz:

$$1^2 \le \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx\right)^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{x}.\sqrt{\frac{f'(x)}{f(x)}}dx\right)^2 \le \int_0^1 xdx.\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{f(1)}{f(0)} = 1.$$

Dấu bằng khi $\frac{f'(x)}{f(x)} = kx$. Thay vào $\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx = 1 \Rightarrow k = 4$. Tìm được $f(x) = e^{2x^2}$.

Bài 22. Tìm hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0,1]$ thỏa mãn:

$f(0)=1, f(1)=\sqrt{3}$ và

$\int_0^1 \left[f(x)f'(x)\right]^2 dx \le 1$.

Hướng dẫn. Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz. Ta có: $\int_0^1 f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}f^2(x)\Big|_0^1 = 1$ và

$$1^2 = \left(\int_0^1 f(x)f'(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 1^2 dx.\int_0^1 \left[f(x)f'(x)\right]^2 dx \le 1.1 = 1$$

Dấu bằng khi $f(x)f'(x)=k$, thay vào $\int_0^1 f(x)f'(x)dx = 1$ được $k=1 \Rightarrow f(x)=\sqrt{2x+1}$.

IV. KẾT LUẬN

Qua theo dõi đề thi THPT Quốc gia, các kì thi Olympic cho học sinh, sinh viên, tác giả nhận thấy các dạng toán về phương trình vi - tích phân được cho từ cơ bản đến phức tạp, có thể là tích hợp từ các bài toán cơ bản, nếu tổng hợp được từng dạng cụ thể dần hình thành chuyên đề đầy đủ cho người học nâng cao kiến thức, có thể tự tổng quát và tạo được hệ thống bài tập trong học tập và nghiêm cứu.

Trong quá trình sưu tầm và tổng hợp tài liệu, do khả năng và thời gian có hạn nên một số kết quả của chuyên đề mới dừng lại ở những kết luận ban đầu, một số vấn đề của chuyên đề có thể chưa được phát triển sâu và cách làm có thể chưa tối ưu. Vì vậy rất mong được sự quan tâm đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo, các bạn đồng nghiệp để chuyên đề có chất lượng tốt hơn.

REFERENCES

[1] *Olympiad exam problems and preparation materials for pupils and students of the Vietnam Mathematical Association (http://vms.org.vn).*

[2] *Fanpage: Mathematical journals and materials - Conquering the Math Olympiad.*

[3] Liem,N.X. (1997), *Calculus Volume 1*, Education Publishing House, Hanoi.

[4] Tri,N.D. (editor)-Ta Van Dinh-Nguyen Ho Quynh (2008), *Advanced Mathematics volume 2*, Education Publishing House, Hanoi.

[5] Long,T.D., Sang,N.D., Tien,N.V.T., Toan, H.Q. (2008), *Calculus exercise, volume 1*, Hanoi National University Publishing House.