THỜI ĐIỂM DỪNG

Stopping times

ThS. Nguyễn Kim Điện*

TÓM TẮT

Đối với toán học, lý thuyết Martingale có tác động đến rất nhiều hướng nghiên cứu. Martinganle bắt nguồn từ trò chơi. Không quá ngạc nhiên khi ngày nay lý thuyết martinganle đã đóng vai trò quan trọng trong lĩnh vực ngẫu nhiên như tài chính, sinh học, vật lý. Ở mặt khác, lý thuyết martingale ứng dụng vào nhiều ngành của toán học như: giải tích hàm, phương trình vi phân, toán kinh tế, và đặc biệt gần đây, có nhiều ứng dụng thú vị trong thị trường chứng khoán.

Một công cụ quan trọng trong lý thuyết martingale và các ứng dụng của chúng là các thời điểm dừng. Thí dụ, chúng ta muốn dừng một martingale trước khi nó nhận các giá trị quá lớn. Tuy nhiên, dừng nên được thực hiện sao cho đối tượng dừng lại là một martingale mới thực sự có ý nghĩa quan trọng. Vậy làm thế nào để xác định được thời điểm dừng? Những điều sau đây sẽ minh chứng cho việc ứng dụng toán học trong thực tiễn, đặc biệt đối với lĩnh vực ngẫu nhiên. Chúng ta sẽ hiểu hơn về thời điểm dừng, đặc điểm và tính chất của chúng qua các khái niệm, ví dụ...

Từ khóa: *Thời điểm dừng, điểm dừng, toán học, lý thuyết martingale.*

ABSTRACT

For mathematics, the theory Martingale has greatly affected research. Martinganle derived from games. Not too surprising today martingale theory has played an important role in random fields like financial, biological, physical areas. Furthermore, martingale theory has also been applied in many branches of mathematics, such as: Functional analysis, differential equations, econometrics, and especially recently, have many significant applications in the stock market

An important tool in martingale theory and the application of them is the time to stop. For example, we want to stop a martingale before it becomes big values. However, the stopping should be made so that the object is a martingale stop which is a really important significance. So how to determine the time to stop? The followings will demonstrate the application of mathematics in practice, especially for random field. We will know more about time stops, characteristics and their properties through the concepts, examples ...

Keywords: *stopping time, stopping point, mathematics, martingale theory*

* Trung tâm GDTX Quang Bình, Hà Giang

I. Mở đầu

1. Tính cấp thiết

Đề tài tập trung nghiên cứu một vấn đề cốt lõi của lý thuyết xác suất, đó là vận dụng lí thuyết martingale với thời gian rời rạc để nghiên cứu thời điểm dừng. Đề tài đề cập tới nhiều ứng dụng của lý thuyết xác suất trong khoa học và đời sống.

2. Mục tiêu nghiên cứu

- Các thời điểm dừng và một số ứng dụng
- Các quá trình tăng liên hợp

3. Phương pháp nghiên cứu

- Kỹ thuật sử dụng các thời điểm dừng.

II. Nội dung

1. Định nghĩa

Giả sử một không gian đo được $(\Omega, \mathcal{F})$ được trang bị một bộ lọc $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Một thời điểm ngẫu nhiên τ: Ω → {0, 1, 2,. . .} ∪ {∞} được gọi là thời điểm dừng nếu thoả mãn:

$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n$ với n = 0, 1, 2,...

Thông thường, một thời điểm dừng sẽ là khoảng thời gian mà một quá trình ngẫu nhiên tương thích với bộ lọc $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ thoả mãn một số tính chất nào đó (như: thời điểm đầu tiên giá chứng khoán chạm trần trong ngày, thời điểm phá sản của một công ty…). Theo như định nghĩa trên, ta có thể thấy rằng, tại thời điểm bất kì, ta có thể xác định xem các tính chất đó có thoả hay không theo lượng thông tin từ bộ lọc mà ta đang xét. Ta cũng thấy rằng độ đo xác suất không ảnh hưởng đến thời điểm dừng, mà chỉ có bộ lọc thông tin ảnh hưởng.

Ví dụ 1.1. Gọi τ là thời điểm mà công ty thực sự phá sản, phải một thời gian sau thì thông tin này mới được chính thức thông báo rộng rãi, như vậy nếu ta không phải là người trong công ty đó, thì trước khi thông tin đó được công bố rộng rãi (chậm hơn thời điểm phá sản thật) ta sẽ không thể trả lời đúng được câu hỏi: công ty đó thật sự phá sản chưa ? điều đó có nghĩa là biến cố T ≤ n không thuộc bộ lọc thông tin của ta tính đến n, do vậy τ không phải là thời điểm dừng với đối bộ lọc thông tin của ta.

Một lớp đặc trưng và thường dùng của thời điểm dừng là lớp của thời điểm chạm

Ví dụ 1.2.(Thời điểm chạm)

Cho $B \in \mathcal{B}(R)$, các quá trình ngẫu nhiên $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ tương thích, và

$$\sigma_B(\omega) := \inf\{n \geq 0: X_n(\omega) \in B\}$$

với inf ∅ := ∞. Khi đó σ_B là thời điểm dừng và gọi là thời điểm chạm của B

Chứng minh: σ_B là một thời điểm dừng sau.

$\{\sigma_B = n\} = \{X_0 \notin B\} \cap .... \cap \{X_{n-1} \notin B\} \cap \{X_n \in B\} \in \mathcal{F}_n$

với n ≥ 1 và $\{\sigma_B = 0\} = \{X_0 \in B\} \in \mathcal{F}_0$.

Ví dụ 1.3.

Cho $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ và $Y = (Y_n)_{n=0}^{\infty}$ là quá trình tương thích và

$$\sigma(\omega) := \inf\{n \geq 0 : X_n(\omega) = Y_n(\omega)\}$$

với inf ∅ =: ∞. Khi đó σ là một thời điểm dừng.

Trong thực tế, nếu ta cho $Z_n := X_n - Y_n$ và B = {0}, thì σ là thời điểm chạm của B đối với quá trình tương thích Z.

Ví dụ 1.4. Cho $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ là quá trình tương thích. Khi đó:

$$\sigma(\omega) := \inf\{n \geq 0 : X_{n+1}(\omega) > 1\}$$

với inf ∅: = ∞ là, nói chung, không phải là một thời điểm dừng.

Bây giờ ta tiếp tục với một số thuộc tính chung của thời điểm dừng.

2. Mệnh đề

Cho σ, τ: Ω → {0, 1, 2,. . .} ∪ {∞} là các thời điểm dừng. Khi đó ta có:

(i) Ánh xạ σ: Ω → R∪{∞} là một biến ngẫu nhiên, có nghĩa là:

$\sigma^{-1}(\infty) \in \mathcal{F}$ và $\sigma^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ cho tất cả các $B \in B(R)$.

(ii) Thời điểm Max $\{\sigma, \tau\}$ là một thời điểm dừng .

(iii) Thời điểm min $\{\sigma, \tau\}$ là một thời điểm dừng .

(iv) Thời điểm $\sigma + \tau$ là thời điểm dừng.

Chứng minh. Mục (i) suy từ

$$\sigma^{-1}(B) = \bigcup_{n \in B, n \geq 0} \sigma^{-1}(\{n\}) \in \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$$

và:

$$\sigma^{-1}(\infty) = \Omega \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma^{-1}(\{n\}) \in \mathcal{F}$$

Mục (ii) và (iii) là kết quả của:

$\{\max\{\sigma, \tau\} = n\} = \{\sigma = n, \tau \leq n\} \cup \{\sigma \leq n, \tau = n\}$

$= (\{\sigma = n\} \cap \{\tau \leq n\}) \cup (\{\sigma \leq n\} \cap \{\tau = n\}) \in \mathcal{F}_n$

và:

$\{\min\{\sigma, \tau\} = n\} = (\{\sigma = n\} \cap \{\tau \geq n\}) \cup (\{\sigma \geq n\} \cap \{\tau = n\})$

$= [\{\sigma = n\} \cap (\Omega \setminus \{\tau < n\})] \cup [\{\tau = n\} \cap (\Omega \setminus \{\sigma < n\})] \in \mathcal{F}_n$

(iv) Chứng minh hoàn toàn tương tự

Bây giờ ta đưa vào σ-đại số $\mathcal{F}_\tau$ trong một thời điểm dừng τ. Các σ-đại số sẽ chứa tất cả các sự kiện ta có thể quyết định cho đến khi thời điểm dừng τ xảy ra. Ví dụ ta có thể quyết định $A = \{\tau = n_0\}$ cho đến khi thời điểm dừng τ: ta lấy $\omega \in \Omega$ và đợi cho đến khi τ sẽ xảy ra, có nghĩa là trên $\{\tau = 0\}$ thời điểm dừng lại xảy ra vào thời điểm 0, trên $\{\tau = 1\}$ tại thời điểm 1.

Nếu $\tau(\omega)$ xảy ra, và $\tau(\omega)\ n \neq 0$ thì $\omega \notin A$, nếu $\tau(\omega) = n_0$, thì $\omega \in A$.

3. Định nghĩa

Cho $\tau: \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$ là một thời điểm dừng, khi đó một tập $A \in \mathcal{F}$ sẽ thuộc F_τ khi và chỉ khi

$A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$, với $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$

4. Mệnh đề

$\mathcal{F}_\tau$ là một σ - đại số

Chứng minh. Ta đã có

$\varnothing \cap \{\tau = n\} = \varnothing \in \mathcal{F}_n$

và $\Omega \cap \{\tau = n\} = \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ với $\forall n \in \{0, 1, \ldots\}$ để $\varnothing, \Omega \in \mathcal{F}_\tau$

Bây giờ cho $A \in \mathcal{F}_\tau$, thì $A^c \cap \{\tau = n\} = \{\tau = n\} \setminus (A \cap \{\tau = n\}) \in \mathcal{F}_n$ để $A^c \in \mathcal{F}_\tau$. Cuối cùng, cho $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_\tau$. Khi đó $A_k \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ và

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n \text{ và } \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}_\tau$$

5. Ví dụ

Nếu $\tau \equiv n_0$ thì $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{n_0}$

Trên thực tế theo định nghĩa $A \in \mathcal{F}_\tau$ nếu $A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ với $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Từ $n \neq n_0$ ta cho rằng $A \cap \{\tau = n\} = \varnothing \in \mathcal{F}_n$ là điều kiện làm giảm tới $n = n_0$, có nghĩa là $A \in \mathcal{F}_\tau$ nếu $A \cap \{\tau = n_0\} \in \mathcal{F}_{n_0}$. Điều đó có nghĩa là $A \in \mathcal{F}_{n_0}$.

6. Mệnh đề

Cho τ là một thời điểm dừng. Khi đó $A \in \mathcal{F}_\tau$ nếu và chỉ nếu $A = A_\infty \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ với $A_n \in \mathcal{F}_n$ và $A_n \subseteq \{\tau = n\}$, và $A_\infty \in \mathcal{F}$ và $A_\infty \subseteq \{\tau = \infty\}$.

Ta sẽ minh họa điều này bằng một ví dụ.

Ví dụ: Cho $X_n = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$, $X_0 = 0$, và $\tau(\omega) = \inf\{n \geq 0 : X_n(\omega) \geq 2\}$. Khi đó có :

$$A=\cap \bigcup_{k\in\{\infty,0,1,...\}} \{\tau=k\}=\bigcup_{k\in\{\infty,0,1,...\}} [A\cap\{\tau=k\}]=\bigcup_{k\in\{\infty,0,1,...\}} A_k$$

với $A_0= A_1= \varnothing$(sau 0 hoặc 1 bước, ta không thể có giá trị 2) và

$A_2 = \{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1\}$,

$A_3= \{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1\}$,

$A_4=\{\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon_4=1\} \cup \{\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=-\varepsilon_4 =1\} \cup \{\varepsilon_1= \varepsilon_2 =-\varepsilon_3=\varepsilon_4= 1\} \cup \cdots$

Ta sẽ tiếp tục với một số tính chất tổng quát của thời điểm dừng.

7. Mệnh đề

Cho $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ là một quá trình thích nghi và $\tau: \Omega \to \{0, 1,. . .\}$ là một thời điểm dừng. Khi đó:

$Z (\omega) := X_{\tau(\omega)}(\omega) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

là $\mathcal{F}_\tau$ - đo được

*Chứng minh***.** Ta thấy rằng:

$\{\omega \in \Omega : Z (\omega) \in B\} \in \mathcal{F}_\tau$ với $\forall B \in B(R)$.

Theo định nghĩa nó tương đương với:

$\{\omega \in \Omega : Z (\omega) \in B\} \cap \{\omega \in \Omega : \tau (\omega) = n\}\in \mathcal{F}_n$,

hoặc:

$\{\omega \in \Omega : X_{\tau(\omega)}(\omega) \in B, \tau (\omega) = n\}\in \mathcal{F}_n$,

hoặc:

$\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \in B, \tau (\omega) = n\}\in \mathcal{F}_n$

hoặc:

$\{X_n\in B\} \cap \{\tau = n\}\in \mathcal{F}_n$,

đó là điều cần chứng minh

8. Mệnh đề

Cho $0 \le S \le T \le \infty$ là thời điểm dừng. Khi đó $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$.

Chứng minh. Ta đã có $A \in \mathcal{F}_S$ nếu và chỉ nếu $A \cap\{S = n\}\in \mathcal{F}_n$ với n = 0,1,2,…

Do vậy $A \cap \{T \le n\} = A \cap \{S \le n\} \cap \{T \le n\} \in \mathcal{F}_n$.

Từ $A \cap \{S \le n\} \in \mathcal{F}_n$ và $\{T \le n\} \in \mathcal{F}_n$.

Nhưng điều này có nghĩa là $A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$.

Một trong những thời điểm dừng quan trọng đối với lý thuyết martingale là các loại thời điểm dừng tuỳ ý (hay tuỳ chọn). Sau đây ta xét đến một kết quả quan trọng về loại thời điểm dừng này và một số thí dụ đặc trưng.

9. Định lý dừng tùy chọn

Nếu $M=(M_n)_{n=0}^{\infty}$ là 1 martingale và $0 \le S \le T <\infty$ là các số nguyên, thì :

$$\mathbb{E}(M_T | \mathcal{F}_S) = M_S$$

Điều gì sẽ xảy ra nếu $S\le T$ được thay thế bằng thời điểm dừng $\sigma,\tau:\Omega\to\{0,1,...\}$?

Để có câu trả lời, ta hãy xem xét ví dụ sau:

Ví dụ: Vốn khởi đầu là 1 Euro và giả sử 1 lượng c Euro, c > 1, ta muốn chiến thắng trò chơi sau đây: Nếu bạn có lượng tiền N_n tại thời điểm n , ta tung 1 đồng xu công bằng và mỗi lần như vậy có thể thắng hoặc thua một lượng $2^n + |N_n|$ Euro, nghĩa là

$$N_0\equiv 1 \text{ và } N_{n+1} := N_n + \varepsilon_{n+1}(2^n + |N_n|)$$

ở đây $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ là các biến ngẫu nhiên Bernoulli đối xứng độc lập. Cho $\varepsilon_0 = 1$, ta lấy $\mathcal{F}_n := \sigma(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_n)$. Ta thu được

$$N_{n+1} \geqq 2^n \text{ nếu } \varepsilon_{n+1} = 1,$$

Đây là những gì chúng ta cần tìm, và quá trình $(N_n)_{n=0}^{\infty}$ là một martingale biến đổi của $(\varepsilon_0+...+\varepsilon_n)_{n=0}^{\infty}$ vì $N_{n+1} - N_n = (2^n + |N_n|)\, \varepsilon_{n+1}$

Bây giờ ta giới thiệu chiến lược dừng $\tau:\Omega\to\{0,1,2,....\}\cup\{\infty\}$ bằng

$$\tau(\omega):=\inf\{n\geq 0:N_n(\omega)\geq c\}$$

Tính chất của τ được tóm tắt trong mệnh đề sau đây,

10. Mệnh đề

Thời gian ngẫu nhiên τ là thời điểm dừng với

(i) $\mathbb{P}\left(\{\omega\in\Omega:\tau(\omega)<\infty\}\right)=1$

(ii) $N_{\tau(\omega)}(\omega)\geq c$ trên $\{\tau<\infty\}$

(iii) Cho mọi T > 0 ta có $\mathbb{P}\left(\{\omega\in\Omega:\tau(\omega)>T\}\right)>0$

Chứng minh. Quá trình $(N_n)_{n=0}^{\infty}$ được thích nghi và τ có thể được xem như thời điểm chạm của tập hợp B = [c, ∞). Vì vậy ta có một thời điểm dừng sau:

(i) cho n ≥ 0,

$$\mathbb{P}(N_{n+1}\geqq 2^n)\geqq\mathbb{P}(\varepsilon_{n+1}=1)=\frac{1}{2}$$

Giả sử, bây giờ 1 $n_0\geq 0$ với $2^{n_0}\geqq c$ đưa ra rằng:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\sup_{n\geqq n_0}N_{n+1}\geqq c)&\geqq\mathbb{P}(\varepsilon_{n_0+1}=1)+\mathbb{P}(\varepsilon_{n_0+1}=-1,\varepsilon_{n_0+2}=1)\\&\quad+\mathbb{P}(\varepsilon_{n_0+1}=-1,\varepsilon_{n_0+2}=-1,\varepsilon_{n_0+3}=1)+....\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}+.....\\&=1\end{aligned}$$

(ii) Theo định nghĩa của τ

(iii) Ta có thể thấy $\varepsilon_1=\ldots=\varepsilon_T=-1$ và có bước như sau

$N_0(\omega)<c$, …., $N_T(\omega)<c$

Vì vậy $\mathbb{P}(\tau>T)\geq 2^{-T}$:

Từ các kết quả trên ta nhận được:

$N_{\tau(\omega)}(\omega)\geq c$ và $\mathbb{E}(N_{\tau\mathcal{X}\{\tau<\infty\}})\geq c$

Vì vậy, cho 2 thời điểm dừng với $0\leq\sigma\leq\tau<\infty$ và 1 martingale $M=(M_n)_{n=0}^{\infty}$ chúng ta không thể kỳ vọng rằng:

$$\mathbb{E}(M_\tau\mid\mathcal{F}_\sigma)$$

Vấn đề là ở chỗ nào? Vấn đề là ở chỗ không có T > 0 sao cho $\mathbb{P}\left(\{\omega\in\Omega:\tau(\omega)\leq T\}\right)=1$

11. Mệnh đề (Định lý dừng tùy chọn)

Cho $Y=(Y_n)_{n=0}^{\infty}$ là 1 martingale dưới tương thích với $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ và giả sử

S, T: $\omega\longrightarrow$ {0, 1, 2,….} là thời điểm dừng sao cho

$$S(\omega)\leqq T(\omega)\leqq T_0<\infty$$

với mọi $\omega\in\Omega$ và một số $T_0>0$. Thì

$$\mathbb{E}(Y_T\mid\mathcal{F}_S)\geq Y_S$$

Có dấu đẳng thức trong trường hợp $Y=(Y_n)_{n=0}^{\infty}$ là 1 martingale.

Chứng minh: (a) Trước tiên ta giả thiết rằng Y là 1 martingale. Ta phải chỉ ra rằng:

$$\mathbb{E}(Y_T\mid F_S)$$

Cho $n\geqq 0$ ta giả sử:

$$H_n(\omega):=\mathcal{X}_{\{n\leqq T(\omega)\}}-\mathcal{X}_{\{n\leqq S(\omega)\}}=\begin{cases}0 & n\leqq S(\omega)\leqq T(\omega)\\0 & S(\omega)\leqq T(\omega)<n\\1 & S(\omega)<n\leqq T(\omega)\end{cases}$$

và nhận được $H_0(\omega) \equiv 0$ mà H_n là $\mathcal{F}_{n-1}$ - đo được với $n \geqq 1$ từ đó:

$$\{H_n = 1\} = \{S < n\} \cap \{n \leq T\} = \{S \leq n-1\} \cap (\Omega \setminus \{T < n\}) \in \mathcal{F}_{n-1}$$

và:

$$\{H_n = 0\} = \Omega \setminus \{H_n = 1\} \in \mathcal{F}_{n-1}$$

Bước tiếp theo ta chú ý $Y_T - Y_S = \sum_{n=1}^{m} H_n(Y_n - Y_{n-1})$ với bất kỳ $m > T_0$ cố định vì vậy:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_T - Y_S) &= \sum_{n=1}^{m} \mathbb{E}\left(H_n\left(Y_n - Y_{n-1}\right)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{m} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(H_n\left(Y_n - Y_{n-1}\right) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{m} \mathbb{E}\left(H_n \mathbb{E}\left(\left(Y_n - Y_{n-1}\right) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Bởi vì $\mathbb{E}\left(\left(Y_n - Y_{n-1}\right) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = 0$ để $\mathbb{E}Y_T = \mathbb{E}Y_S$. Giả sử bây giờ $B \in \mathcal{F}_S$ và xác định khoảng thời điểm ngẫu nhiên mới:

$$S_B := S\lambda_B + m\lambda_{B^c}$$
$$T_B := T\lambda_B + m\lambda_{B^c}$$

Khoảng thời điểm ngẫu nhiên S_B và T_B là khi thời điểm dừng, ví dụ với S_B ta có

$$\{S_B = n\} = \left(B \cap \{S = n\}\right) \cup \left(B^c \cap \{m = n\}\right)$$

Ở số hạng đầu tiên phụ thuộc vào $\mathcal{F}_n$ bởi định nghĩa σ-đại số $\mathcal{F}_S$ và số hạng thứ 2 phụ thuộc vào $\mathcal{F}_n$ khi nó bằng với tập rỗng nếu m ≠ n và $B^c \in \mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_m = \mathcal{F}_n$ nếu m=n. Vì vậy ta có thời điểm dừng với:

$$0 \leqq S_B \leqq T_B \leqq m$$

Vì thế:

$$\mathbb{E}\left(Y_{T\lambda B} + Y_{m\lambda B^c}\right) = \mathbb{E}Y_{T_B} = \mathbb{E}Y_{S_B} = \mathbb{E}\left(Y_{S\lambda B} + Y_{m\lambda B^c}\right)$$

Và:

$$\int_B Y_T d\mathbb{P} = \int_B Y_S d\mathbb{P}$$

Cùng với *mệnh đề 7*ở trênđiều này có nghĩa là $\mathbb{E}\left(Y_T \mid \mathcal{F}_S\right) = Y_S$

(b) Bây giờ ta giả sử rằng chúng ta có 1 martingale dưới: Trước tiên, ta áp dụng phân tích Doob và nhận thấy rằng:

$$Y_n = M_n + A_n$$

Từ bước (a) ta có:

$$\mathbb{E}\left(M_T \mid \mathcal{F}_S\right) = M_S$$

Vì thế:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(Y_T \mid \mathcal{F}_S\right) &= \mathbb{E}\left(M_T + A_T \mid \mathcal{F}_S\right) \\
&= M_S + \mathbb{E}\left(A_T \mid \mathcal{F}_S\right) \\
&\geqq M_S + \mathbb{E}\left(A_S \mid \mathcal{F}_S\right) \\
&= Y_S
\end{aligned}$$

Ví dụ (*tiếp theo ví dụ trên*)

Giả thiết rằng bây giờ ta phải dừng chơi trò chơi trong khoảng thời gian $T_0 > 0$. Chiến lược mới của ta là:

$$T(\omega) := \min\{\tau(\omega), T_0\}$$

Chú ý rằng cực tiểu của 2 thời điểm dừng lại là 1 thời điểm dừng. Hơn nữa $T \leqq T_0$. Cho $S \equiv 0$, ta có:

$$0 \leqq S \leqq T \leqq T_0$$

Và, bởi định lý dừng tùy chọn, $\mathbb{E}\left(M_T \mid \mathcal{F}_S\right) = M_S$ vì vậy:

$$\mathbb{E}M_T = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(M_T \mid \mathcal{F}_S\right)\right) = \mathbb{E}M_S = 1$$

Vì thế chiến lược kép không công bằng của ta không làm việc bất kỳ lúc nào như trước nữa, ta không thể trở nên giàu có nếu ta chỉ có thời điểm hữu hạn theo sự sắp xếp của ta.

III. Kết luận

Thời điểm dừng là một khái niệm quan trọng trong lý thuyết martingale. Trong các lĩnh vực mang tính xác suất, ngẫu nhiên thì thời điểm dừng mang ý nghĩa rất quan trọng. Những người chơi trò chơi Poker thường nói "thắng thua là việc hoàn toàn bình thường, không có gì lạ lẫm cả. Nếu bạn không kiểm soát những rủi ro, bạn sẽ bị những rủi ro kiểm soát". Biết rằng rủi ro là không thể kiểm soát, cũng không thể dự liệu trước, chi bằng ta hãy cố gắng tránh nó, chứ không phải là kiểm soát nó. Việc xác lập được *thời điểm dừng* là việc làm cần thiết để tránh cho chúng ta tránh được những thất bại nặng nề bởi tình trạng mất kiểm soát khi ưu thế không nằm ở phía mình. Đặc biệt, trong các "trò chơi kinh tế " như chứng khoán, cũng như trong điều hành kinh tế *thời điểm dừng* phải được tính toán cân nhắc thận trọng và ngay cả khi đó cũng nên tiếp tục thực hiện các biện pháp dài hạn để thu về lợi nhuận cao nhất, bền vững và lâu dài.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Duy Tiến, Vũ Viết Yên (2003). *Lý thuyết xác suất*, NXB Giáo dục.
2. Geiss C.,Geiss S., *An introduction to probability theory*. 2004
3. D. Williams. *Probability with martingales*. 1991