

## ẢNH HƯỞNG CỦA TÍNH CHẤT ĐỒ THỊ LÊN RÀNG BUỘC GIỮA CÁC BẤT BIẾN TRONG CÂY VÀ ĐỒ THỊ PHẪNG

**Influences of graph's quality on the invariables' relationship in tree and plane graph**

**ThS. Không Chí Nguyễn\***

**ThS. Vũ Thị Khánh Trinh\***

**ThS. Nguyễn Văn Dân\***

### TÓM TẮT

Lý thuyết đồ thị là một ngành Toán học có nhiều ứng dụng quan trọng trong Tin học và trong thực tế. Những ý tưởng cơ bản được đề ra bởi nhà toán học Thụy sĩ Leonhar Euler (1707-1783). Ông đã dùng đồ thị để giải quyết bài toán nổi tiếng về 7 chiếc cầu ở Königsberg. Bằng mô hình đồ thị, chúng ta có thể giải quyết được nhiều bài toán thực tế như: tìm cách để tham quan một triển lãm sao cho mỗi một hành lang đi qua đúng một lần, tìm số màu ít nhất để tô màu bản đồ, biểu diễn sự ảnh hưởng lẫn nhau giữa các cá nhân trong một tổ chức hay sự cạnh tranh giữa các loài trong môi trường tự nhiên...

Giữa tính chất của đồ thị và các bất biến trong đồ thị có mối liên hệ ràng buộc chặt chẽ với nhau. Bài báo này chỉ trình bày một số kết quả về ảnh hưởng của tính chất của đồ thị lên ràng buộc giữa các bất biến trong cây và đồ thị phẳng.

**Từ khóa:** đồ thị; cây; đồ thị phẳng; cạnh; đỉnh.

### ABSTRACT

Graph Theory is a Mathematic field which has many important applications in Informatics and in reality. The basic ideas were proposed by the Swiss Mathematician - Leonhar Euler (1707-1783). He used graphs to solve the famous problem of 7 brigdes in Königsberg. By using graph models, we can solve many factual problems such as looking for a way to visit an exhibition so that each corridor is passed only once, finding the fewest numbers of colours to colour a map, showing an mutual effects among individuals in a group or a competition among species in natural environment...

There is a close relationship between graph's features and the invariables in graph. This paper only presents some results of the effects of the former on the relationship among the latter in tree and plane graphs.

**Key word:** graph; tree; plane graph; vertex; edge.

### I. Đặt vấn đề

Mối liên hệ giữa tính chất của đồ thị và ràng buộc của một số bất biến trong đồ thị được nghiên cứu cùng với sự hình thành và phát triển của lý thuyết đồ thị. Các kết quả này được trình bày rải rác trong nhiều tài

liệu của các tác giả khác nhau về lý thuyết đồ thị, cũng như các tài liệu có liên quan. Bài báo này tập hợp các kết quả đó và trình bày chúng theo chủ đề: “Ảnh hưởng của tính chất đồ thị lên ràng buộc giữa các bất biến trong cây và đồ thị phẳng”. Một số phát hiện mới của tác giả cũng sẽ được trình bày.

---

\* Trường Đại học Tân Trào

## II. Nội dung nghiên cứu

### 1. Một số khái niệm cơ bản

#### 1.1. Đồ thị

Đồ thị vô hướng là cặp  $G = (V, E)$ , trong đó  $V$  là tập hợp nào đó, còn  $E$  là tập con của tập  $\{(u, v) \mid u, v \in V, u \neq v\}$ ,  $v \in V$  được gọi là các đỉnh, còn các phần tử của  $E$  được gọi là các cạnh của đồ thị  $G$ . Cạnh  $(u, v) \in E$  được ký hiệu đơn giản là  $uv$  hay  $vu$ . Như vậy, các đồ thị ta xét ở đây là các đồ thị vô hướng, không có khuyên và không có cạnh bội. Ta còn gọi những đồ thị này là đơn đồ thị vô hướng.

Tập đỉnh và tập cạnh của đồ thị  $G$  cũng thường được ký hiệu tương ứng là  $V(G)$  và  $E(G)$ . Ta gọi số đỉnh của đồ thị  $G$  là cấp của đồ thị  $G$ , ký hiệu là  $|V|$  hay  $|V(G)|$ ; còn số cạnh của đồ thị  $G$  được gọi là cỡ của đồ thị  $G$ , ký hiệu là  $|E|$  hay  $|E(G)|$ . Nếu cạnh  $e = uv \in E(G)$ , thì ta nói rằng  $u$  và  $v$  là hai đỉnh kề nhau trong  $G$ , hay cạnh  $e$  liên thuộc với hai đỉnh  $u$  và  $v$ .

Đồ thị  $G = (V, E)$  có cấp  $|V| = n$  và cỡ  $|E| = m = C_n^2$  được gọi là đồ thị đầy đủ cấp  $n$ , ký hiệu là  $K_n$ . Nói cách khác đồ thị đầy đủ là một đồ thị trong đó mọi cặp đỉnh của nó kề nhau.

Đồ thị  $G = (V, E)$  có cấp  $n \neq 0$  và cỡ  $m = 0$  được gọi là đồ thị rỗng cấp  $n$ , ký hiệu là  $E_n$  hay  $O_n$ . Nói cách khác đồ thị rỗng là đồ thị trong đó không có cặp đỉnh nào là kề nhau.

Đồ thị  $K_1 = E_1$  được gọi là đồ thị tầm thường.

Giả sử  $x$  là một đỉnh tùy ý của đồ thị  $G = (V, E)$ .

Ta gọi tập  $N(x) = \{y \in V \mid y \neq x, xy \in E\}$  là tập các đỉnh kề của  $x$  (hay còn gọi là tập các đỉnh láng giềng của  $x$ ). Số  $|N(x)|$  được gọi là bậc của đỉnh  $x$  trong đồ thị  $G$  và ký hiệu là  $deg(x)$ . Nếu  $deg(x) = 0$  thì  $x$  được gọi là đỉnh cô lập.

#### 1.3. Đồ thị con

Ta nói đồ thị  $G' = (V', E')$  được gọi là đồ thị con của đồ thị  $G = (V, E)$  và ký hiệu là

$G' \subseteq G$  nếu  $V' \subseteq V$  và  $E' \subseteq E$ . Nếu  $G' \subseteq G$  và  $G'$  chứa tất cả các cạnh của  $G$  mà nối hai đỉnh của  $V'$ , thì  $G'$  được gọi là đồ thị con cảm sinh bởi  $G$  lên tập đỉnh con  $V'$  và được ký hiệu là  $G[V']$ . Nếu  $G' \subseteq G$  và  $V' = V$  thì  $G'$  được gọi là đồ thị con bao trùm của đồ thị  $G$ . Nếu  $W \subseteq V$  thì  $G - W = G[V - W]$  là đồ thị nhận được từ  $G$  bằng cách xoá đi tất cả các đỉnh của  $W$  và tất cả các cạnh liên thuộc với các đỉnh đó. Tương tự, nếu  $E' \subseteq E$  thì  $G - E' = G(V, E - E')$ . Nếu  $x, y \in V(G)$  là hai đỉnh không kề nhau trong  $G$  thì  $G + xy$  là đồ thị nhận được từ  $G$  bằng cách thêm cạnh nối  $x$  với  $y$ .

#### 1.2. Liên thông trong đồ thị

Hai đỉnh phân biệt  $x$  và  $y$  của đồ thị  $G = (V, E)$  được gọi là liên thông, nếu có một đường từ  $x$  đến  $y$  trong  $G = (V, E)$ . Đồ thị  $G$  được gọi là liên thông nếu mọi cặp đỉnh phân biệt trong  $G$  đều liên thông với nhau. Đồ thị con liên thông cực đại của  $G$  được gọi là thành phần liên thông của đồ thị đó. Như vậy một đồ thị liên thông là một thành phần liên thông của chính nó.

Một đỉnh  $x \in V(G)$  được gọi là đỉnh cắt nếu  $G - x$  có nhiều thành phần liên thông hơn đồ thị  $G$ . Tương tự, cạnh  $e \in E(G)$  được gọi là cầu nếu  $G - e$  có nhiều thành phần liên thông hơn đồ thị  $G$ .

Giả sử  $G = (V, E)$  là một đồ thị liên thông, còn  $W \subseteq V$  thoả mãn  $G - W$  là không liên thông, thì tập đỉnh  $W$  được gọi là tách được đồ thị  $G$ . Nếu hai đỉnh  $s$  và  $t$  của  $G$  thuộc hai thành phần liên thông khác nhau của đồ thị  $G - W$  thì ta nói  $W$  tách được  $s$  với  $t$ . Tương tự, nếu  $E' \subseteq E$  thoả mãn  $G - E'$  là không liên thông, thì tập cạnh  $E'$  được gọi là tách được đồ thị  $G$ , và nếu hai đỉnh  $s$  và  $t$  của  $G$  thuộc hai thành phần liên thông khác nhau của  $G - E'$  thì ta nói  $E'$  tách được  $s$  với  $t$ .

Đồ thị  $G = (V, E)$  được gọi là  $k$ -liên thông ( $k \geq 2$ ) nếu  $G$  là đồ thị đầy đủ  $K_{k+1}$ , hoặc

$G$  có ít nhất  $k+2$  đỉnh và không có bất kỳ tập  $k-1$  đỉnh nào tách nó.

Giá trị cực đại  $k$  để đồ thị  $G$  là  $k$ -liên thông được gọi là *độ liên thông* của  $G$  và ký hiệu là  $\kappa(G)$ . Tương tự giá trị cực đại  $k$  để đồ thị là  $k$ -liên thông cạnh được gọi là *độ liên thông cạnh* của  $G$  và ký hiệu là  $\lambda(G)$ .

**2. Một số kết quả về ảnh hưởng của tính chất đồ thị lên ràng buộc giữa các bất biến trong lớp đồ thị phẳng và cây**

**2.1. Cây**

Đồ thị vô hướng liên thông, không có chu trình được gọi là cây, và ký hiệu là  $T=(V, E)$ . Một đồ thị không có chu trình, không nhất thiết liên thông được gọi là rừng. Như vậy mỗi một thành phần liên thông của rừng là một cây.

**Định lý 1 [3].** Giả sử  $T=(V, E)$  là đồ thị vô hướng có cấp  $n$  và cỡ  $m$ . Khi đó các mệnh đề sau là tương đương:

- (i)  $T$  là cây;
- (ii)  $T$  là đồ thị liên thông không có chu trình và  $m=n-1$ ;
- (iii)  $T$  là đồ thị liên thông và  $m=n-1$ .

*Chứng minh.*

1.1 (i)  $\rightarrow$  (ii). Giả sử  $T=(V, E)$  là cây. Khi đó  $T$  không có chu trình. Ta sẽ chứng minh  $m=n-1$  bằng qui nạp theo  $n$ . Với  $n=1$ , khẳng định là hiển nhiên. Vì  $m=0=1-1=n-1$ .

Giả sử khẳng định đã được chứng minh là đúng cho những cây có số đỉnh nhỏ hơn  $n$ . Xét cây  $T=(V, E)$  với  $|V|=n$  và  $e \in E(T)$  là một cạnh bất kỳ. Khi đó đồ thị  $T-e$  là không liên thông, vì trong trường hợp ngược lại  $T$  sẽ có ít nhất một chu trình chứa cạnh  $e$ . Mâu thuẫn với  $T$  là cây. Suy ra  $T-e$  có đúng 2 thành phần liên thông, không có chu trình là  $T_1=(V_1, E_1)$  và  $T_2=(V_2, E_2)$ . Thật vậy, nếu  $T-e$  có nhiều hơn 2 thành phần liên thông thì  $T$  sẽ

không liên thông. Mâu thuẫn với  $T$  là cây. Khi đó ta có:

$$n = |V_1| + |V_2| \text{ và } m = |E_1| + |E_2| + 1.$$

$T_1$  và  $T_2$  là những cây có số đỉnh nhỏ hơn  $n$ . Theo giả thiết qui nạp, ta có  $|E_i| = |V_i| - 1$  với  $i = 1, 2$ . Suy ra:

$$m = |E_1| + |E_2| + 1 = (|V_1| - 1) + (|V_2| - 1) + 1 = n - 1.$$

1.2 (ii)  $\rightarrow$  (iii). Để chứng minh (iii) ta chỉ cần chứng minh  $T$  là liên thông. Ta cũng chứng minh bằng qui nạp theo  $n$ . Với  $n=1$ , khẳng định đúng. Giả sử khẳng định đã được chứng minh cho những đồ thị có cấp nhỏ hơn  $n$ .

Nếu  $T=(V, E)$  là không liên thông, thì  $T$  có  $k \geq 2$  thành phần liên thông là  $T_i=(V_i, E_i), 1 \leq i \leq k$ . Mỗi thành phần  $T_i, i=1, 2, \dots, k$ , là một đồ thị liên thông, không có chu trình. Do đó  $T_i, 1 \leq i \leq k$  là các cây, và vì thế  $|E_i| = |V_i| - 1, 1 \leq i \leq k$ . Khi đó ta có:

$$m = \sum_{i=1}^k |E_i| = \sum_{i=1}^k (|V_i| - 1) = n - k, k \geq 2.$$

Mâu thuẫn với giả thiết  $m=n-1$ . Vậy  $T$  là liên thông.

1.3 (iii)  $\rightarrow$  (i). Giả sử  $T$  không là cây. Khi đó  $T$  có chu trình, chẳng hạn  $C$ . Lấy  $e \in E(C)$  là một cạnh bất kỳ và xét đồ thị  $T-e$ . Ta có  $T-e$  là đồ thị liên thông. Nếu  $T-e$  không là cây thì  $T-e$  chứa chu trình  $C'$  và đồ thị  $(T-e)-e'$ ,  $e' \in E(C')$ , là đồ thị liên thông. Thực hiện quá trình này cho tới khi ta thu được cây  $T^*$ . Theo chứng minh ở 1.1(i)  $\rightarrow$  (ii),  $T^*$  có  $n-1$  cạnh và  $n$  đỉnh. Điều này suy ra không có cạnh nào trong  $T$  bị xoá. Vậy  $T$  là cây. Định lý được chứng minh xong. ■

**Hệ quả 2 [4].** Một cây cấp  $n$  thì có cỡ là  $n-1$ . Một rừng cấp  $n$  và  $k$  thành phần liên thông thì có cỡ là  $n-k$ . ■

Trong lớp đồ thị cây, cây có gốc có nhiều ứng dụng trong thực tế, đặc biệt là trong

quản lý dữ liệu máy tính hay việc mô hình hoá hệ thống cơ cấu tổ chức... Để tìm hiểu về cây có gốc, công nhận định lý sau.

**Định lý 3 [3].** Một đồ thị là cây nếu giữa mọi cặp đỉnh của nó luôn tồn tại một đường duy nhất. ■

Trong cây  $T=(V,E)$ , xét một đỉnh đặc biệt,  $r \in V(T)$ , được gọi là gốc của  $T$ . Khi định rõ gốc ta có thể gán cho mỗi cạnh một hướng duy nhất từ gốc đi ra. Cây  $T=(V,E)$  cùng với gốc  $r \in V(T)$  sinh ra một đồ thị có hướng gọi là cây có gốc. Như vậy từ một cây bất kỳ ta luôn chuyển nó thành cây có gốc bằng cách chọn một đỉnh tùy ý làm gốc.

Giả sử  $T=(V,E)$  là cây có gốc  $r \in V(T)$ . Cha của một đỉnh  $v \in V(T), v \neq r$ , là một đỉnh duy nhất  $u \in V(T)$  sao cho có đúng một cạnh từ  $u$  đến  $v$ ,  $u$  có thể trùng với  $r$ . Nếu đỉnh  $u$  là cha của đỉnh  $v$ , thì đỉnh  $v$  được gọi là con của đỉnh  $u$ . Các đỉnh có cùng cha được gọi là anh em. Tổ tiên của một đỉnh  $x \in V(T), x \neq r$  là tất cả các đỉnh trên đường từ gốc  $r$  tới  $x$ , còn dòng dõi của một đỉnh  $x \in V(T)$  là tất cả các đỉnh coi  $x$  như là tổ tiên. Những đỉnh mà không có con được gọi là đỉnh lá, còn những đỉnh khác được gọi là đỉnh trong, đỉnh gốc  $r \in V(T)$  là một đỉnh trong. Khi  $|V(T)|=1$  thì  $V=\{r\}$  và lúc này  $r$  được gọi là đỉnh lá.

Nếu  $a \in V(T)$  là một đỉnh của cây, thì cây con gốc  $a$ , là đồ thị con cảm sinh của cây đang xét bởi tập đỉnh bao gồm  $a$  và các dòng dõi của nó.

Một cây có gốc được gọi là cây  $m$ -phân nếu tất cả các đỉnh trong của nó có không quá  $m$  con. Cây  $m$ -phân được gọi là đầy đủ nếu mọi đỉnh trong của nó có đúng  $m$  con. Cây  $m$ -phân với  $m=2$  được gọi là cây nhị phân. Chú ý rằng nếu  $x \in V(T)$  là một đỉnh trong thì  $\deg(x) \leq m$ .

Sau đây ta xét một số kết quả quan trọng về cây  $m$ -phân. Ta ký hiệu  $n$ ,  $t$  và  $l$  tương ứng là số đỉnh, số đỉnh trong và số đỉnh lá của cây  $m$ -phân.

**Định lý 4 [3].** Giả sử  $T=(V,E)$  là cây  $m$ -phân đầy đủ cấp  $n$  với  $t$  đỉnh trong. Khi đó  $n = mt + 1$ .

*Chứng minh.* Với mọi  $x \in V, x \neq r$ ,  $x$  luôn là một đỉnh con của một đỉnh trong nào đó. Trong  $t$  đỉnh trong này, mỗi đỉnh có đúng  $m$  con. Do đó có  $mt$  đỉnh khác gốc  $r$ . Suy ra cây  $m$ -phân đầy đủ có  $n = mt + 1$  đỉnh. ■

**Định lý 5 [3].** Giả sử cây  $m$ -phân đầy đủ  $T=(V,E)$  có cấp  $n$ ,  $t$  đỉnh trong và  $n$  đỉnh lá. Khi đó nếu biết một trong 3 đại lượng này thì 2 đại lượng kia cũng sẽ được xác định. Cụ thể là:

(i) Nếu  $T$  có cấp  $n$  thì  $t = \frac{n+1}{m}$  và  $l = \frac{(m-1)n+1}{m}$ ;

(ii) Nếu  $T$  có  $t$  đỉnh trong thì  $n = mt + 1$  và  $l = (m-1)t + 1$ ;

(iii) Nếu  $T$  có  $l$  đỉnh lá thì  $n = \frac{ml-1}{m-1}$  và  $t = l - \frac{1}{m-1}$ .

*Chứng minh.* Giả sử cây  $T=(V,E)$  có cấp  $n$ . Ta cũng giả sử  $t$  là số đỉnh trong,  $l$  là số đỉnh lá của  $T$ . Vì trong cây có gốc chỉ có hai loại đỉnh, đó là đỉnh lá và đỉnh trong. Do đó ta luôn có đẳng thức  $n = t + l$ .

Bây giờ ta chứng minh các khẳng định (i), (ii) và (iii) của định lý.

(i) Theo định lý 4 ta có  $n = mt + 1$ . Suy ra:  $t = \frac{n-1}{m}$  và  $l = n - t = \frac{n-n-1}{m} = n(m-1) + \frac{1}{m}$ .

(ii) Giả sử cây  $m$ -phân đầy đủ có  $t$  đỉnh trong. Khi đó theo định lý 3 và đẳng thức

$n=t+l$ , ta suy ra  $t+l=mt+1$ . Do đó:  
 $l=(m-1)t+1$ . Hiển nhiên  $n=mt+1$  (định lý 4).

(iii) Giả sử cây  $m$ -phân đầy đủ  $T=(V, E)$  có  $l$  đỉnh lá. Khi đó theo định lý 4 và đẳng thức  $n=t+l$ , ta suy ra:

$$l = n - t = n - \frac{n-1}{m} = \frac{nm - n + 1}{m}$$

$$\Leftrightarrow ml = nm - n + 1 \Leftrightarrow n = \frac{ml - 1}{m - 1}.$$

Do đó ta có:  $t = n - l = \frac{ml - 1}{m - 1} - l = \frac{l - 1}{m - 1}$ . ■

Ta xét một tham số khác là chiều cao của cây có gốc. Ta định nghĩa *mức của một đỉnh*  $v \in V$  là độ dài của đường từ gốc  $r \in V$  tới  $v$  và ký hiệu là  $\mu(v)$ . Như vậy  $\mu(v) = d(r, v)$  với  $v \in V(T)$ . Chiều cao của cây có gốc  $T$ , ký hiệu là  $h = h(T) = \max_{v \in V} \mu(v)$ .

Cây  $m$ -phân có chiều cao  $h$  được gọi là *cân đối* nếu các lá của nó đều ở mức  $h$  hoặc  $h-1$ . Cây  $m$ -phân hoàn toàn là cây  $m$ -phân đầy đủ trong đó mọi lá ở cùng mức. Định lý sau đây nêu lên mối quan hệ giữa số lá và chiều cao của cây.

**Định lý 6 [3].** Giả sử  $T=(V, E)$  là cây  $m$ -phân có chiều cao  $h$ , số lá  $l$ . Khi đó  $l \leq m^h$ .

*Chứng minh.* Ta chứng minh khẳng định này bằng qui nạp theo  $h$ .

Trước hết ta xét cây  $m$ -phân có chiều cao  $h=1$ . Những cây dạng này chỉ gồm đỉnh gốc và đỉnh con. Do đó mỗi con của nó là một đỉnh lá. Vì vậy có không quá  $m^1 = m$  lá trong cây  $m$ -phân chiều cao  $h=1$ .

Giả sử khẳng định được chứng minh là đúng cho cây  $m$ -phân có chiều cao  $h$ . Ta xét cây  $m$ -phân  $T=(V, E)$  có chiều cao nhỏ hơn  $h$ . Xoá tất cả các cạnh nối từ gốc đến các đỉnh mức 1. Ta sẽ thu được không quá  $m$  cây con  $m$ -phân của gốc có chiều cao  $h=1$ . Theo giả

thiết qui nạp số các đỉnh lá của mỗi cây con này là không quá  $m^h - 1$  đỉnh. Do đó tổng số các đỉnh lá của những cây con này là không quá  $m \cdot m^{h-1} = m^h$ . Mặt khác rõ ràng là các đỉnh lá của cây  $m$ -phân  $T$  có chiều cao  $h$  chính là các đỉnh lá của những cây con  $m$ -phân chiều cao  $h=1$  nói trên của  $T$ . Vì vậy, số các đỉnh lá của  $T$  là  $l \leq m^h$ . ■

**Nhận xét 7 [3].** Nếu  $T=(V, E)$  là cây  $m$ -phân hoàn toàn thì  $\deg(u) = m$  với mọi đỉnh trong  $u$  và với mọi đỉnh lá  $v \in V, \mu(v) = h = h(T)$ . Khi đó, số các đỉnh lá của cây  $T$  là  $l = m^h$ . Từ đây ta xác định được cấp của  $T$  và số các đỉnh trong của cây  $T$  nhờ định lý 5(iii).

### 2.2. Đồ thị phẳng

Đồ thị  $G=(V, E)$  được gọi là *đồ thị phẳng*, nếu ta có thể biểu diễn nó trên mặt phẳng sao cho các cạnh của  $G$  hoặc không giao nhau hoặc giao nhau chỉ ở đỉnh chung của chúng. Ta đồng nhất đồ thị phẳng  $G$  với một *biểu diễn phẳng* như vậy của nó trên mặt phẳng.

Trong đồ thị phẳng  $G=(V, E)$ , một *miền* là *phần mặt phẳng* được giới hạn bởi các cạnh của  $G$  và không bị chia thành các phần nhỏ bởi các cạnh khác. Ký hiệu bằng  $F$  là tập các miền của một đồ thị phẳng, số  $|F| = f$  là số các miền của đồ thị phẳng,  $f \geq 1$ .

Ảnh hưởng của tính chất của đồ thị lên ràng buộc giữa các bất biến được thể hiện tương đối rõ nét qua qua các định lý sau đây trong đồ thị phẳng.

**Định lý 8 [1].** Giả sử  $G=(V, E)$  là đồ thị phẳng, liên thông có  $n$  đỉnh,  $m$  cạnh và  $f$  miền. Khi đó:  $n - m + f = 2$ .

*Chứng minh.* Ta chứng minh khẳng định trên bằng qui nạp theo số miền  $f$ .

Với  $f=1$ , thì  $G$  không có chu trình. Vì đồ thị  $G$  là liên thông, nên  $G$  là cây. Theo hệ quả 2 ta có  $m=n-1$ . Do vậy,

$n - m + f = n - (n - 1) + 1 = 2$ . Khẳng định đúng cho trường hợp  $f = 1$ .

Giả sử khẳng định đã được chứng minh là đúng cho những đồ thị phẳng có số miền nhỏ hơn  $f, f \geq 2$ . Ta xét đồ thị phẳng liên thông  $G = (V, E)$  có  $f \geq 2$  miền. Khi đó, trong  $G$  có ít nhất một chu trình, chẳng hạn  $C$ . Nếu  $xy$  là một cạnh thuộc tập  $E(C)$ , thì  $xy$  sẽ liên thuộc với cả hai miền trong  $G$ . Suy ra  $G - xy$  là đồ thị phẳng có  $m - 1$  cạnh,  $f - 1$  miền và  $n$  đỉnh. Theo giả thiết qui nạp ta có:

$$n - (m - 1) + (f - 1) = 2 \Leftrightarrow n - m + f = 2. \blacksquare$$

Định lý 1 được gọi là công thức Euler cho đồ thị phẳng.

**Định lý 9.12 [4].** Giả sử  $G = (V, E)$  là đồ thị phẳng có  $n$  đỉnh,  $m$  cạnh,  $f$  miền và  $k$  thành phần liên thông. Khi đó  $n - m + f = k + 1$ .

*Chứng minh.* Giả sử  $G_i = (V_i, E_i)$  với  $1 \leq i \leq k$  là những thành phần liên thông của đồ thị  $G$ . Mỗi thành phần  $G_i, 1 \leq i \leq k$ , là một đồ thị phẳng, liên thông. Ký hiệu  $n_i = |V_i|, m_i = |E_i|$  và  $f_i = |F_i|, 1 \leq i \leq k$ . Theo định lý 1, ta có  $n_i - m_i + f_i = 2, 1 \leq i \leq k$ . Vì với mọi  $i \neq j, 1 \leq i, j \leq k, V_i \cap V_j = \emptyset$ , nên  $\sum_{i=1}^k n_i = n$  và  $\sum_{i=1}^k m_i = m$ .

Ta nhận xét thấy rằng các đồ thị phẳng, liên thông  $G_i, 1 \leq i \leq k$  có chung một miền ngoài cùng, tức là miền có biên không giới hạn. Vì vậy miền này sẽ được đếm  $k$  lần trong  $\sum_{i=1}^k f_i$ .

Do đó:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^k f_i - k + 1. \text{ Suy ra:} \\ n - m + f &= \sum_{i=1}^k (n_i - m_i + f_i) - k + 1 \\ &= \sum_{i=1}^k 2 - k + 1 = 2k - k + 1 = k + 1. \blacksquare \end{aligned}$$

Giả sử đồ thị  $G = (V, E)$  có chu trình. *Chu vi nhỏ nhất* của đồ thị  $G$ , ký hiệu là  $g(G)$  hay  $g$ , là *độ dài của chu trình ngắn nhất* trong

$G$ . *Chu vi lớn nhất* của  $G$ , ký hiệu là  $c(G)$  hay  $c$ , là *độ dài của chu trình lớn nhất* trong  $G$ . Nếu đồ thị không có chu trình, thì ta qui ước  $g = c = +\infty$ . Như vậy với mọi đồ thị  $G = (V, E)$  ta có  $3 \leq g(G) \leq c(G) \leq +\infty$ .

**Định lý 10 [4], [1].** Giả sử đồ thị phẳng, liên thông  $G = (V, E)$  có  $n$  đỉnh,  $m$  cạnh,  $f$  miền và chu vi nhỏ nhất  $g$  thỏa mãn  $3 \leq g < +\infty$ . Khi đó

- (i)  $m \leq \frac{g}{g-2}(n-2)$  (Bất đẳng thức cạnh - đỉnh),
- (ii)  $3f \leq 2m$  (Bất đẳng thức cạnh - miền).

*Chứng minh.* Giả sử  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ,  $F = \{R_1, R_2, \dots, R_f\}$ . Ta thành lập ma trận cạnh - miền  $X = (x_{ij})_{mf}$ , trong đó:

- $x_{ij} = 1$  nếu  $e_j$  là một cạnh trên biên của  $R_i$ ;
- $x_{ij} = 0$  nếu  $e_j$  không là một cạnh trên biên của  $R_i$ ;

cho mọi  $i = 1, 2, \dots, m$  và  $j = 1, 2, \dots, f$ . Vì mỗi cạnh ở trên biên của nhiều nhất 2 miền, nên mỗi hàng có nhiều nhất 2 chữ số 1. Mặt khác có ít nhất 3 cạnh ở trên biên của một miền tạo thành một chu trình, nên số các chữ số 1 trên mỗi cột ít nhất là  $g \geq 3$ . Gọi  $N$  là số các chữ số 1 trong ma trận  $X$ . Khi đó ta có  $gf \leq N \leq 2m$ . Vì  $g \geq 3$  nên  $3f \leq gf$  và như vậy ta có bất đẳng thức cạnh - miền  $3f \leq 2m$ .

Mặt khác, theo công thức Euler cho đồ thị phẳng ta có:  $f = m - n + 2$ . Suy ra:

$$\begin{aligned} g(m - n + 2) &\leq 2m \Leftrightarrow (g - 2)m \leq g(n - 2) \\ \Leftrightarrow m &\leq \frac{g}{g-2}(n-2). \blacksquare \end{aligned}$$

Từ công thức Euler cho đồ thị phẳng và các bất đẳng thức cạnh - miền, cạnh - đỉnh ta có các hệ quả sau đây về quan hệ cạnh - đỉnh trong một số lớp đồ thị phẳng cụ thể.

**Hệ quả 11 [3].** Giả sử  $G = (V, E)$  là đồ thị phẳng, liên thông có  $n$  đỉnh,  $m$  cạnh và  $f$  miền. Khi đó:

- (i) Nếu  $n \geq 3$  thì  $m \leq 3(n-2)$ ;
- (ii) Nếu  $n \geq 3$  và không có chu trình độ dài 3, thì  $m \leq 2(n-2)$ ;
- (iii) Nếu  $n \geq 4$  và không có chu trình độ dài 3 và 4, thì  $m \leq \frac{5}{3}(n-2)$ .

*Chứng minh.* (i) Nếu  $G$  không có chu trình, thì vì  $G$  là liên thông nên  $G$  là cây. Do vậy  $f=1$ . Theo định lý 11 ta có  $n-m+f=2$ , nên  $m=n+f-2=n+1-2 \leq (n-2)+(n-2)=2(n-2)$ . Suy ra  $m < 3(n-2)$ . Khẳng định đúng nếu  $G$  không có chu trình.

Giả sử  $G$  có chu trình thì  $3 \leq g < +\infty$ . Theo định lý 13 ta có:

$$m \leq \frac{g}{g-2}(n-2) \Leftrightarrow g(m-n+2) \leq 2m.$$

$$\text{Suy ra } 3(m-n+2) \leq 2m \Leftrightarrow m \leq 3(n-2).$$

(ii) Nếu  $G$  không có chu trình, thì vì  $G$  liên thông, nên  $G$  là cây và do đó  $f=1$ . Theo định lý 1 ta suy ra:  $m=n+1-2=n-1=2n-n-1 \leq 2n-3-1=2(n-2)$ . Vậy khẳng định đúng nếu  $G$  không có chu trình.

Giả sử  $G$  có chu trình. Khi đó  $4 \leq g < +\infty$ . Theo chứng minh định lý 10 và công thức Euler cho đồ thị phẳng, ta có:

$$gf \leq 2m \Leftrightarrow 4(m-n+2) \leq 2m \Leftrightarrow m \leq 2(n-2).$$

(iii) Nếu  $G$  không có chu trình,  $G$  liên thông. Suy ra  $G$  là cây. Do đó  $f=1$ . Theo định lý 1, ta có  $m=n+f-2=n-1$  hay  $3m=3n-3=5n-2n-3 \leq 5n-2.4-3 < 5n-10$ .

Vì vậy khẳng định đúng, nếu  $G$  không có chu trình.

Giả sử  $G$  có chu trình. Khi đó  $5 \leq g < +\infty$ . Theo định lý 3 ta có  $gf \leq 2m$  hay:  $5(m-n+2) \leq 2m \Leftrightarrow 3m \leq 5(n-2)$ . ■

**Hệ quả 12 [3].** Nếu  $G = (V, E)$  là đồ thị phẳng 2 - phần, liên thông với  $n \geq 3$  đỉnh và  $m$  cạnh thì  $m \leq 2(n-2)$ .

*Chứng minh.* Vì  $G$  là đồ thị 2- phần, nên  $G$  không có chu trình độ dài lẻ. Nói riêng  $G$  không có chu trình độ dài 3. Sử dụng hệ quả 4(ii), ta có điều phải chứng minh. ■

Hệ quả 12 chỉ là một trường hợp riêng của định lý 16.

### 3. Kết quả nghiên cứu chính

Tập con  $I \subseteq V$  của đồ thị  $G = (V, E)$  được gọi là *tập độc lập* nếu đồ thị con cảm sinh  $G[I]$  là đồ thị rỗng. Tập con độc lập với số đỉnh nhiều nhất của  $G$ , được gọi là *tập độc lập đỉnh của  $G$* . Ký hiệu bằng  $\alpha(G)$  số đỉnh của tập độc lập đỉnh lớn nhất và gọi là *số độc lập đỉnh của đồ thị  $G$* .

**Định lý 13.** Giả sử  $T = (V, E)$  là cây  $m$  - phần có chiều cao  $h$  và  $\alpha(T)$  là số độc lập đỉnh của  $T$ . Khi đó:

(i) Nếu  $h$  chẵn thì  $\alpha(T) \leq 1 + m^2 + m^4 + \dots + m^h$ ;

(ii) Nếu  $h$  lẻ thì  $\alpha(T) \leq m + m^3 + m^5 + \dots + m^h$ .

*Chứng minh.* (i) Ta ký hiệu  $r$  là đỉnh gốc và  $I$  là tập độc lập đỉnh lớn nhất của  $T$ . Ký hiệu:  $I_k = \{x \in V(T) \mid \mu(x) = k, k = 0, 2, \dots, h\}$ .

Rõ ràng đồ thị con cảm sinh  $T[I_k], k = 0, 2, 4, \dots, h$  là đồ thị rỗng. Mặt khác, theo định lý 3, ta suy ra mỗi đỉnh của  $I_k$  không kề với bất kỳ đỉnh nào của  $I_{k'}$  với  $k \neq k'$  và  $k, k' = 0, 2, 4, \dots, h$ . Do đó đồ thị con cảm sinh  $T[I_0 \cup I_2 \cup \dots \cup I_h]$  là đồ thị rỗng. Hơn nữa  $I_0 \cap I_2 \cap \dots \cap I_h = \emptyset$ , nên ta có:  $|I| = |I_0| + |I_2| + \dots + |I_h|$ .

Bây giờ ta tính  $|I_k|$  với  $k = 0, 2, 4, \dots, h$ .

Ký hiệu  $T_k$  là đồ thị con cảm sinh của cây  $m$  - phần  $T = (V, E)$  lên tập các đỉnh mức  $k$

và các tổ tiên của chúng. Như vậy  $T_k$  là cây  $m$ -phân có chiều cao  $k$ , và  $I_k$  là tập các đỉnh lá của nó. Khi đó, theo định lý 6 ta có:  $|I_k| \leq m^k, k=0,2,4,\dots,h$ . Suy ra:

$$\alpha(T) = |I| \leq m^0 + m^2 + m^4 + \dots + m^h.$$

(ii) Giả sử  $h$  lẻ và  $r$  là gốc của  $T=(V,E)$ . Xét một cây con  $T'$  của gốc  $r$ . Khi đó  $h(T') = h-1$  là số chẵn. Theo chứng minh (i), ta có:  $\alpha(T') \leq 1+m^2+m^4+\dots+m^h-1$ .

Mặt khác, có không quá  $m$  cây con kiểu  $T'$ . Suy ra

$$\alpha(T) \leq m\alpha(T') \leq m(1+m^2+m^4+\dots+m^h-1) = m+m^3+m^5+\dots+m^h. \blacksquare$$

Cây Fibonacci  $T_n$  được định nghĩa một cách đệ qui như sau:

(i)  $T_1$  và  $T_2$  là cây có gốc chỉ gồm 1 đỉnh;

(ii) Với  $n=3,4,\dots$  cây  $T_n$  là cây có gốc  $r$  với  $T_{n-1}$  là cây con bên trái và  $T_{n-2}$  là cây con bên phải.

Như vậy cây Fibonacci là cây nhị phân. Theo định lý 5(iii), nếu biết số lá của cây  $T_n$  là  $l_n = l(T_n)$  thì số đỉnh trong  $l(T_n) = l_{n-1}$  còn cấp  $|V(T_n)| = 2l_{n-1}$ . Vì vậy ta chỉ cần xác định được số lá của cây  $T_n, n \geq 3$ .

Theo định nghĩa cây Fibonacci,  $T_1$  và  $T_2$  có số lá bằng 1. Để xác định số lá của  $T_3$  ta tính tổng số lá của hai cây  $T_1$  và  $T_2$ . Ta có:

$$l(T_3) = l_3 = l_1 + l_2 = 1 + 1 = 2.$$

Tiếp tục, cây Fibonacci thứ  $n$  có số lá:

$$l(T_n) = l(T_{n-1}) + l(T_{n-2}) \text{ hay: } l_n = l_{n-1} + l_{n-2}.$$

Như vậy dãy số  $\{l_n\}$  thỏa mãn hệ thức truy hồi:  $l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$ , với  $n \geq 3$  cùng với điều kiện ban đầu  $l_1 = 1, l_2 = 1$ . Vậy số đỉnh lá của

cây  $T_n$  chính là số Fibonacci thứ  $n$ . Ta có định lý sau.

**Định lý 14 [3].** Giả sử  $T_n = (V_n, E_n), n \geq 3$  là cây Fibonacci thứ  $n$ . Ký hiệu  $l(T_n)$  là số đỉnh lá của nó. Khi đó  $l(T_n) = l_n$ , trong đó  $l_n$  là số Fibonacci thứ  $n$  được cho bởi hệ thức truy hồi sau:  $l_1 = 1, l_2 = 1, l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$  với  $n \geq 3$ . ■

Ký hiệu  $h_n = h(T_n)$  là chiều cao của cây Fibonacci  $T_n, n \geq 3$ .

**Định lý 15 [3].**  $h_n = h(T_n) = n - 2, n \geq 3$ .

*Chứng minh.* Ta chứng minh khẳng định này bằng qui nạp theo  $n$ . Với  $n=3$  ta có  $h_3 = 1, n - 2 = 3 - 2 = 1$ . Khẳng định đúng cho  $n=3$ .

Giả sử khẳng định đã được chứng minh là đúng cho mọi cây Fibonacci  $T_k$  với  $3 \leq k < n$ . Khi đó cây  $T_n$  được xây dựng từ 2 cây Fibonacci  $T_{n-1}$  và  $T_{n-2}$  bằng cách lấy một đỉnh tùy ý  $r_n \in V(T_{n-1}) \cup V(T_{n-2})$  và nối  $r_n$  với gốc  $r_{n-1}$  của  $T_{n-1}$  và gốc  $r_{n-2}$  của  $T_{n-2}$ . Rõ ràng theo định nghĩa của cây Fibonacci, ta có:  $h(T_n) = h(T_{n-1}) + 1$ .

Theo giả thiết qui nạp  $h(T_{n-1}) = (n-1) - 2 = n - 3$ . Suy ra:  $h_n = h(T_n) = (n-3) + 1 = n - 2$ . Vậy khẳng định đúng cho cây  $T_n$ . ■

**Định lý 16.** Giả sử  $G = (V, E)$  là đồ thị phẳng  $k$ -phần, liên thông với  $k \geq 2, n \geq 3$  đỉnh và  $m$  cạnh. Khi đó:  $m \leq 2(k-1)(n-k)$ .

*Chứng minh.* Giả sử đồ thị phẳng, liên thông,  $k$ -phần  $G = (V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k, E)$  trong đó  $k \geq 2, V_i \cap V_j = \emptyset$  cho mọi  $i \neq j, 1 \leq i, j \leq k$  và  $|V_i| = n_i, 1 \leq i \leq k$ . Với mỗi cặp  $V_i$  và  $V_j, 1 \leq i, j \leq k, i \neq j$ , đồ thị con cảm sinh



$G[V_i \cup V_j]$  là một đồ thị con 2 - phần, ta ký hiệu là:

$$G_{ij} = (V_i \cup V_j, E_{ij}), |E_{ij}| = m_{ij}.$$

$G_{ij}$  là đồ thị phẳng 2 - phần, liên thông.

Sử dụng hệ quả 12, ta có:  $m_{ij} \leq 2(n_i + n_j) - 4$ . Tổng có  $C_k^2$  đồ thị con 2 - phần  $G_{ij}$ ,  $i \neq j, 1 \leq i, j \leq k$ , và rõ ràng tập cạnh của chúng là rời nhau.

$$\text{Ta có: } \sum_{1 \leq i < j \leq k} m_{ij} = m,$$

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq k} (n_i + n_j) &= (k-1)n_1 + (k-1)n_2 + \dots + (k-1)n_k \\ &= (k-1)(n_1 + n_2 + \dots + n_k) = (k-1)n. \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq k} m_{ij} &\leq \sum_{1 \leq i < j \leq k} [2(n_i + n_j) - 4] \\ &= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} [(n_i + n_j) - 2] \end{aligned}$$

$$\text{hay } m \leq 2[(k-1)n - k(k-1)] = 2(k-1)(n-k). \blacksquare$$

### III. Kết luận

Bài báo trình bày một số kết quả trong các tài liệu khác nhau về sự ảnh hưởng của tính chất của đồ thị lên ràng buộc giữa các bất biến trong lớp đồ thị phẳng và cây. Phần lớn các kết quả đều liên quan đến số cạnh và số đỉnh của đồ thị. Định lý 13 và Định lý 16 là những kết quả mới.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. B. Bollobas, *Graph Theory an Introductory Course*, New York - Heidelberg - Berlin, 1979;
2. R. J. McElice, R.B. Ash, C. Ash, *Introduction to Discrete Mathematics*, McGraw - Hall Book Company, 1989;
3. K. H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Application*, 2, McGraw - Hill Book Company, 1991;
4. R. Wilson, *Introduction to Graph Theory*, Longman, 1975.
5. B. Bollobas et all (Editors), *Proceeding of Symposia in Applied Mathematics*, 14, *Probability Combinators and Its Applications*, American Mathematical Society, 1991;
6. O. Ore, *Theory of Graphs*, American Mathemetican Society, Province, XXXVIII, 1962.